



Universidad de San Carlos de Guatemala
Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Física

PARADOJA DE PARRONDO EN CAMINATAS CUÁNTICAS DISCRETAS EN UNA LÍNEA

Mariana Elizabet Pérez Muralles

Asesorada por M.Sc. José Alfredo de León Garrido,
Dr. Carlos Francisco Pineda Zorrilla e
Ing. José Rodolfo Samayoa Dardón

Guatemala, septiembre de 2026

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA



ESCUELA DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS

**PARADOJA DE PARRONDO EN CAMINATAS
CUÁNTICAS DISCRETAS EN UNA LÍNEA**

TRABAJO DE GRADUACIÓN
PRESENTADO A LA JEFATURA DEL
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
POR

MARIANA ELIZABET PÉREZ MURALLES

ASESORADA POR M.SC. JOSÉ ALFREDO DE LEÓN GARRIDO,
DR. CARLOS FRANCISCO PINEDA ZORRILLA E
ING. JOSÉ RODOLFO SAMAYOA DARDÓN

AL CONFERÍRSELE EL TÍTULO DE
LICENCIADA EN FÍSICA APLICADA

GUATEMALA, SEPTIEMBRE DE 2026

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA
ESCUELA DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS



CONSEJO DIRECTIVO INTERINO

Director	M.Sc. Jorge Marcelo Ixquiac Cabrera
Representante Docente	Arq. Marco Antonio de León Vilaseca
Representante Docente	M.A. Pedro Peláez Reyes
Representante de Egresados	Lic. Urías Amitaí Guzmán García
Representante de Estudiantes	Sr. Willian Fernando Campos Tello
Representante de Estudiantes	Sr. Cristian Oswaldo Cabrera Melara
Secretario	Lic. Billy Othmaro Quevedo Carranza

TRIBUNAL QUE PRACTICÓ EL EXAMEN GENERAL PRIVADO

Director	M.Sc. Jorge Marcelo Ixquiac Cabrera
Examinador	Dr. Juan Adolfo Ponciano Castellanos
Examinador	Dra. María Eugenia Cabrera Catalán
Examinador	M.Sc. Edgar Anibal Cifuentes Anléu
Secretario	Lic. Billy Othmaro Quevedo Carranza

Ref. D.DTG. F008-2026
Guatemala, 07 de septiembre de 2026

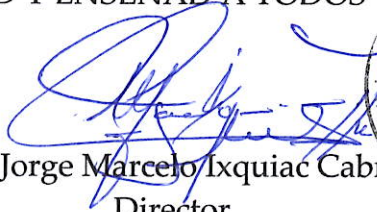
EL DIRECTOR DE LA ESCUELA DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS DE LA
UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

CONSIDERANDO:

Que el trabajo de graduación titulado: "**PARADOJA DE PARRONDO EN CAMINATAS CUÁNTICAS DISCRETAS EN UNA LÍNEA**", presentado por la estudiante universitaria **Mariana Elizabet Pérez Muralles**, ha sido revisado y aprobado por el Asesor y el Jefe de la Licenciatura en Física Aplicada, se autoriza la impresión del trabajo de graduación.

IMPRÍMASE.

"ID Y ENSEÑAD A TODOS"



M.Sc. Jorge Marcelo Ixquiac Cabrera
Director



AGRADECIMIENTOS

A Dios, por darme la fortaleza para superar los momentos difíciles, la sabiduría para afrontar cada reto y la perseverancia para no rendirme. Por permitirme llegar hasta este momento y por poner en mi camino a las personas que me han acompañado y ayudado a crecer. Agradezco también a la Virgen María, por su constante intercesión y protección. A ambos encomiendo el camino que está por comenzar.

A mis papás, Vicente y Flor de María, por acompañarme y ser mi soporte en cada etapa de mi formación. Gracias por enseñarme con su ejemplo a ser perseverante y dedicada. Este logro también es suyo, pues detrás de cada paso que he dado están su incansable esfuerzo, sus sacrificios y su entero apoyo. Gracias por su cariño incommensurable, por no dudar en que alcanzaría esta meta, por celebrar mis logros como suyos y por motivarme a soñar en grande.

A mi hermanita, Gaby, por su inmenso cariño y apoyo. Gracias por ser mi amiga, por estar siempre dispuesta a darme una mano cuando más lo necesito, por llenar mis días de alegría con tu sentido del humor, por creer en mis capacidades y por darme los ánimos necesarios para seguir adelante. Eres para mí un ejemplo constante de esfuerzo y dedicación. Deseo verte alcanzar cada una de tus metas y celebrarlas contigo con la misma felicidad con la que celebras las mías.

A mi familia, por desear siempre lo mejor para mí. Gracias por acompañarme en este camino, por sus palabras de aliento y por celebrar conmigo cada logro. Su compañía me ha hecho sentir siempre muy querida. Agradezco especialmente a mi abuelito, por tenerme siempre presente y por preocuparse por mí.

A mi novio, Amado, por caminar conmigo durante todo este trayecto. Gracias por tu incondicional amor y ayuda, por estar a mi lado mientras enfrentábamos las adversidades, descubríamos cosas nuevas y crecíamos juntos, tanto en lo personal como en lo profesional. Haber compartido contigo este camino hizo que la carga fuera más ligera y que los buenos momentos fueran aún más especiales. Me hace sumamente feliz poder culminar esta etapa a tu lado y me llena de emoción pensar en lo que seguiremos construyendo juntos.

A José, por todas las oportunidades que me ha abierto para involucrarme en la investigación. Gracias por animarte a trabajar conmigo en un proyecto tan interesante, por compartirme tus conocimientos y experiencia, por tu orientación y enorme paciencia. Agradezco profundamente la manera desinteresada en que siempre has apoyado a muchos estudiantes, brindándonos oportunidades para participar en eventos y actividades que han contribuido significativamente a nuestra formación académica. Especiales gracias a Cindy y a ti por habernos abierto las puertas de su casa a Amado y a mí. Son recuerdos que guardo con mucho cariño.

A Carlos Pineda, por su valioso acompañamiento y apoyo desde el inicio de este proyecto. Valoro mucho el tiempo, la disposición y la paciencia que tuvo para orientarme a lo largo de este proceso, así como todo el aprendizaje que he obtenido trabajando con usted. Agradezco especialmente la oportunidad que me brindó de realizar una estancia académica en el Instituto de Física de la UNAM, pues fue fundamental para el desarrollo de este proyecto y contribuyó significativamente a mi formación académica. Además, fue un gusto poder coincidir con usted en persona. Asimismo, agradecemos el apoyo de los proyectos UNAM-PAPIIT IG101324 y SECIHTI CBF-2025-I-1548.

Al Ing. Rodolfo Samayoa, por su excelente labor docente y administrativa. Gracias por trabajar siempre en favor de nuestra formación, por buscar nuevas oportunidades para nuestro crecimiento y, sobre todo, por confiar en nuestras capacidades. Agradezco su dedicación y el impacto que ha tenido en mi formación.

A mis profesores de la ECFM: Mapache, Juan Diego, Giovanni, Beatriz, Laura, Damián, Rodrigo, Héctor y Freddy, por su dedicación para enseñar, por compartir su conocimiento sin egoísmo e inspirar mi curiosidad. Gracias por exigirnos dar lo mejor de nosotros mismos y por motivarnos a ir más allá de lo que creíamos que éramos capaces de hacer.

A Claudia, Normita y Paola, por siempre tener la mejor disposición para ayudarme con todos mis trámites administrativos. Al todo el personal de la ECFM, por su labor que hace posible el funcionamiento de la Escuela.

A mis amigos de la universidad: Majó, Obsdy, Sandra, Ana, Marcelo y Alex, por haber hecho de estos años una experiencia mucho más bonita. Gracias por compartir conmigo preocupaciones académicas (y laborales con algunos), además de tantas risas y buenos momentos. Cada uno de ustedes me ayudó en etapas importantes de este camino y por ello les estoy muy agradecida. Les deseo a todos el mayor éxito posible y, a los que están a un pasito de graduarse: ¡ánimo, ya falta poco!

DEDICATORIA

A mis papás, a mi hermanita, a mi novio y a mi yo de 14 años que soñaba con ser física.

ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE DE FIGURAS	IV
ÍNDICE DE TABLAS	V
LISTA DE SÍMBOLOS	VII
OBJETIVOS	IX
INTRODUCCIÓN	XI
1. FUNDAMENTOS TEÓRICOS	1
1.1. Caminatas cuánticas	1
1.1.1. Modelo matemático y dinámica de una DTQW	2
1.1.2. Distribución de probabilidad, valor esperado y varianza de una DQWL	4
1.2. Paradoja de Parrondo	5
1.2.1. Origen de la paradoja de Parrondo	7
1.2.2. Paradoja de Parrondo en DTQW	8
2. RESULTADOS	11
2.1. Parametrización del problema en el escenario más simple	11
2.2. Clasificación de estrategias variando un parámetro	13
2.3. Diagramas de fase de la emergencia de la paradoja	17
CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO	23
BIBLIOGRAFÍA	25
A. Ángulo de rotación crítico	31

B. Proyección social	39
B.1. Docencia	39
B.1.1. Descripción general del taller	39
B.1.2. Recibimiento del taller	40
B.2. Extensión	41
B.2.1. Descripción de actividades realizadas	42
B.2.2. Resultados del evento	43

ÍNDICE DE FIGURAS

1.1. Comparación esquemática entre: (a) una realización particular de una caminata aleatoria en una línea, y (b) la evolución de una caminata cuántica en tiempo discreto, donde el caminante se propaga en una superposición de estados de posición en cada paso temporal t	1
1.2. Reproducción del ejemplo propuesto por G. P. Harmer y D. Abbott para ilustrar la paradoja de Parrondo. Cada juego es individualmente perdedor; sin embargo, al alternarlos de manera periódica (AABB) o aleatoria, emerge un comportamiento ganador. Los resultados se promediaron a partir de 10 000 simulaciones de 100 juegos cada una. . .	6
1.3. Esquema ilustrativo del mecanismo del trinquete browniano intermitente.	7
2.1. Clasificación de estrategias de acuerdo a la tendencia de su valor esperado de la posición en el tiempo: (a) tendencia positiva, (b) tendencia negativa, (c) tendencia constante (nula).	12
2.2. Clasificación de estrategias con comportamientos oscilatorios. (a) Tendencia positiva a tiempos largos, (b) tendencia negativa a tiempos largos, (c) tendencia indeterminada: el valor esperado de la posición es negativo para valores de tiempo impares y nulo para valores pares. . . .	13
2.3. Valor esperado de la posición en función del ángulo de rotación de la estrategia para los tiempos $t = 1, 2, \dots, 5$. Para valores fijos de α , ϕ y γ ocurre uno de los siguientes tres escenarios: en (a) y (b) aparece un único valor de θ que anula el valor esperado de la posición (el valor trivial); en (c) y (d) aparecen dos valores de θ que anulan el valor esperado de la posición (el valor trivial y el crítico); y en (e) todos los valores de $\theta \in [0, 2\pi)$ anulan el valor esperado de la posición.	15

2.4.	Ejemplo de la emergencia de la paradoja de Parrondo. Los valores individuales $\theta_1 = 3\pi/4$ y $\theta_2 = 7\pi/8$ producen resultados perdedores, como se muestra en los paneles (a) y (b). Sin embargo, al combinarlos, <i>i. e.</i> , al emplear $\theta_3 = \theta_1 + \theta_2 = 13\pi/8$, se obtiene un resultado ganador, tal como se observa en el panel (c).	18
2.5.	Diagramas de fase de la emergencia de la paradoja de Parrondo (región azul: $L \circ L = W$). La diferencia azimutal entre el estado inicial de la moneda y el eje de rotación determinan el tipo de estrategias para $\theta \in (0, \theta_c)$ y $\theta \in (\theta_c, 2\pi)$, produciendo dos tipos de diagramas de fase.	20
A.1.	Valor esperado de la posición en función del ángulo de rotación para cuatro estrategias con eje de rotación y estado inicial de la moneda seleccionados de manera aleatoria y uniforme sobre la esfera de Bloch, para los tiempos $t = 1, 25, 50, 75, 100$. En los paneles (a) y (b), la diferencia azimutal satisface $(\gamma - \phi) \bmod 2\pi \in (0, \pi)$; en consecuencia, los valores $\theta \in (0, \theta_c)$ generan estrategias ganadoras, mientras que $\theta \in (\theta_c, 2\pi)$ conducen a estrategias perdedoras. Este comportamiento se invierte en los paneles (c) y (d), donde $(\gamma - \phi) \bmod 2\pi \in (\pi, 2\pi)$. . .	37
B.1.	Resolución de dudas durante el taller.	41
B.2.	Fotografías de los colaboradores en cada día del evento.	44
B.3.	Diploma de participación en InfoUSAC 2025 extendido por el director de la Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas.	45

ÍNDICE DE TABLAS

B.1. Distribución de participantes inscritos por unidad académica.	40
--	----

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolo	Significado
$ \psi\rangle$	<i>ket</i> , vector de estado en la notación de Dirac
$\langle\psi $	<i>bra</i> , funcional en la notación de Dirac
$\langle\psi \phi\rangle$	producto interno en la notación de Dirac
$ \psi\rangle\langle\phi $	producto externo en la notación de Dirac
$ \psi, \phi\rangle$	producto tensorial $ \psi\rangle \otimes \phi\rangle$
t	paso temporal discreto
x	posición discreta del caminante
$P(x, t)$	distribución de probabilidad de encontrar al caminante en la posición x al tiempo t
X	operador de posición del caminante
$\langle X \rangle_t$	valor esperado de la posición del caminante a un tiempo t
U	operador de evolución unitario
S	operador de desplazamiento condicional
C	operador de la moneda
H	operador de Hadamard
$\mathbb{1}$	operador identidad
$\mathcal{H}_T$	espacio de Hilbert total del sistema compuesto $\mathcal{H}_P \otimes \mathcal{H}_c$
$\mathcal{H}_p$	espacio de Hilbert de la posición del caminante
$\mathcal{H}_c$	espacio de Hilbert de la moneda
σ_i	i -ésima matriz de Pauli
$\vec{\sigma}$	vector compuesto por las matrices de Pauli, $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$
$\hat{n}(\alpha, \phi)$	eje de rotación del operador de la moneda
α	ángulo polar del eje de rotación $\hat{n}$
ϕ	ángulo azimutal del eje de rotación $\hat{n}$
θ	ángulo de rotación del operador de moneda alrededor del eje $\hat{n}$
θ_c	ángulo de rotación crítico

Símbolo	Significado
$ c_0(\beta, \gamma)\rangle$	estado inicial de la moneda
β	ángulo polar del vector de Bloch del estado inicial de la moneda
γ	ángulo azimutal del vector de Bloch del estado inicial de la moneda
W	estrategia ganadora
L	estrategia perdedora

OBJETIVOS

General

Investigar la emergencia de la paradoja de Parrondo en caminatas cuánticas discretas en una línea con monedas homogéneas.

Específicos

1. Realizar una revisión bibliográfica del estado del arte de la paradoja de Parrondo en caminatas cuánticas discretas en el tiempo.
2. Explorar la existencia de patrones de estrategias perdedoras que conduzcan a la emergencia de la paradoja en caminatas cuánticas discretas en una línea con monedas homogéneas.
3. Estudiar el papel del operador de la moneda y del estado inicial en la aparición de la paradoja de Parrondo.

INTRODUCCIÓN

Dentro de la teoría de juegos existe un fenómeno contraintuitivo conocido como la *paradoja de Parrondo*, la cual establece que la combinación o alternancia de estrategias individualmente perdedoras puede dar lugar a un resultado ganador. Este fenómeno ha encontrado aplicaciones en diversas áreas como la física estadística [18], la biología [46, 6, 9, 51, 50], la economía [45, 27] y la dinámica social [52, 23, 24]. Más recientemente, ha cobrado relevancia en el ámbito de la información cuántica [41, 37], donde resulta particularmente interesante su estudio en el contexto de caminatas cuánticas discretas en el tiempo.

Las caminatas cuánticas discretas en el tiempo son el análogo cuántico de las caminatas aleatorias y constituyen uno de los modelos más versátiles y estudiados para describir la dinámica de sistemas cuánticos en redes discretas. El interés creciente en su estudio se debe a que han demostrado ser una herramienta fundamental tanto para el análisis de fenómenos de la computación e información cuántica como para el desarrollo de algoritmos que superan a los desarrollados a partir de su contraparte clásica, las caminatas aleatorias [48, 7].

Para formular la paradoja de Parrondo en el contexto de las caminatas cuánticas discretas en el tiempo, se define una estrategia mediante la elección de un operador de moneda y del estado inicial de la caminata, que en conjunto controlan la interferencia de las amplitudes de probabilidad que determinan la dirección de movimiento del caminante. Una tendencia positiva del valor esperado de la posición del caminante en el tiempo indica que la estrategia es ganadora, mientras que una tendencia negativa indica que es perdedora.

Si bien existen numerosos trabajos que reportan la emergencia de la paradoja de Parrondo en caminatas cuánticas discretas, muchos de ellos consideran escenarios de mayor complejidad, tales como caminatas con múltiples monedas [39, 40], caminatas de dimensión superior [22, 25], la introducción de ruido [49, 3], o el uso de monedas dependientes del tiempo o de la posición del caminante [38, 3, 32]. En contraste, el caso más simple de una caminata cuántica unidimensional discreta en el tiempo con

monedas homogéneas, es decir, operadores de moneda que no dependen de la posición ni del tiempo, ha recibido relativamente poca atención. En particular, dos artículos que abordan este escenario señalan que el comportamiento paradójico desaparece en el límite de tiempos largos [11, 26].

Este trabajo tiene como objetivo investigar de manera sistemática la emergencia de la paradoja de Parrondo en caminatas cuánticas discretas en una línea, empleando exclusivamente monedas homogéneas. Para ello, usamos operadores de moneda pertenecientes a $SU(2)$ e identificamos las condiciones geométricas que deben cumplir los parámetros de un conjunto seleccionado de estrategias para ser clasificadas como ganadoras o perdedoras. A partir de esto, definimos las fases que conducen a la emergencia del comportamiento paradójico.

Este documento está organizado de la siguiente manera: el capítulo 1 expone los fundamentos teóricos necesarios para el desarrollo del trabajo, incluyendo una introducción a las caminatas cuánticas discretas en el tiempo y la formulación de la paradoja de Parrondo. El capítulo 2 detalla las especificaciones del problema abordado y presenta los resultados obtenidos, iniciando con la clasificación sistemática del conjunto de estrategias seleccionado y concluyendo con la construcción de diagramas de fase que permiten identificar las regiones donde emerge la paradoja de Parrondo y otros fenómenos. El capítulo de Conclusiones y trabajo futuro sintetiza los hallazgos principales y propone posibles líneas de investigación. Finalmente, el apéndice A contiene la deducción analítica de los valores del ángulo de rotación que anulan el valor esperado de la posición, mientras que el apéndice B describe las actividades realizadas en el marco de los ejes de extensión y docencia.

1. FUNDAMENTOS TEÓRICOS

1.1. Caminatas cuánticas

Una caminata aleatoria es un proceso estocástico en el que un caminante se desplaza a través de una red de posiciones discretas, siendo la dirección de su movimiento determinada de manera probabilística. Una caminata cuántica es la versión cuántica del proceso anterior, en la cual la evolución del sistema sigue las reglas de la mecánica cuántica. A diferencia del caso clásico donde el caminante ocupa una única posición en cada paso, en una caminata cuántica el caminante se halla en una superposición de posiciones dentro de la red (ver fig. 1.1). Esto da lugar a la aparición de interferencia, lo que conduce a que el sistema evolucione de forma distinta a como lo haría una caminata aleatoria.

Existen dos modelos de caminatas cuánticas de acuerdo con la naturaleza del parámetro temporal: continuas y discretas en el tiempo. Estas últimas (abreviadas como DTQW por sus siglas en inglés *discrete-time quantum walks*) son las que conciernen a este proyecto, por lo que profundizaremos en ellas a continuación.

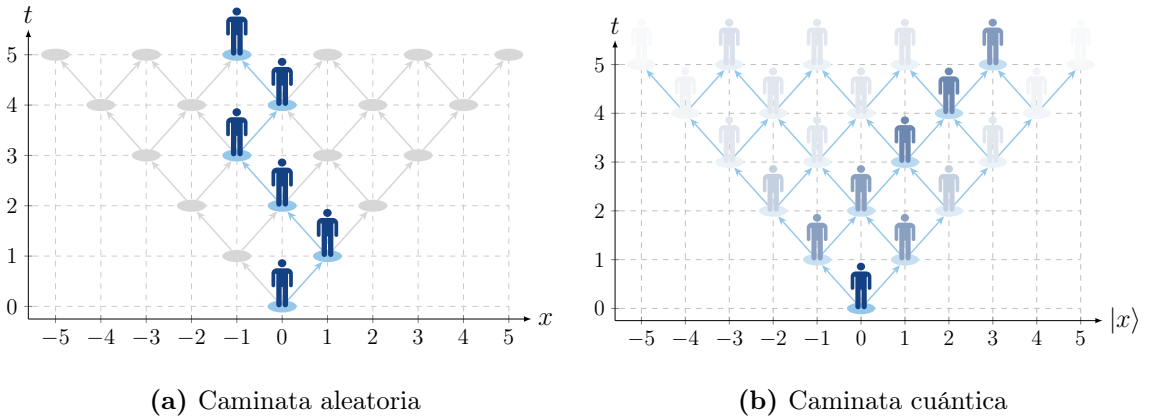


Figura 1.1. Comparación esquemática entre: (a) una realización particular de una caminata aleatoria en una línea, y (b) la evolución de una caminata cuántica en tiempo discreto, donde el caminante se propaga en una superposición de estados de posición en cada paso temporal t .

1.1.1. Modelo matemático y dinámica de una DTQW

Las caminatas cuánticas discretas en el tiempo consisten en un sistema cuántico denominado *caminante* que posee dos grados de libertad: uno espacial, asociado a su *posición*, y otro interno, denominado *moneda*. El estado total del sistema evoluciona en un espacio de Hilbert compuesto, $\mathcal{H}_T = \mathcal{H}_p \otimes \mathcal{H}_c$, formado por el producto tensorial del espacio de posición del caminante $\mathcal{H}_p$, cuyos vectores de la base representan las posiciones discretas en la red, y el espacio de la moneda $\mathcal{H}_c$, cuyos vectores de la base representan los estados internos que determinan la dirección del movimiento en cada paso temporal [48].

La evolución de las DTQW está gobernada por un operador de evolución unitario que se aplica al sistema total en pasos de tiempo discretos [48]:

$$U = S \cdot (\mathbb{1}_p \otimes C), \quad (1.1)$$

donde C (del inglés *coin*) es el operador de moneda y S (del inglés *shift*) es el operador de desplazamiento condicional. El operador de moneda es un operador unitario que actúa únicamente sobre el subespacio de la moneda, generando una superposición de direcciones posibles, lo cual cumple un papel similar al lanzamiento de una moneda en una caminata aleatoria. Este operador puede ser homogéneo, si permanece constante durante toda la caminata, o no homogéneo, si depende del tiempo o de la posición del caminante. Por otro lado, el operador de desplazamiento es un operador unitario que actúa sobre el sistema total y desplaza al caminante sobre la red de acuerdo con el estado de la moneda.

Dada esta dinámica, el estado de la caminata en un paso temporal t está dado por

$$|\psi_t\rangle = U |\psi_{t-1}\rangle = U^t |\psi_0\rangle, \quad (1.2)$$

donde $|\psi_0\rangle$ es el estado inicial de la caminata. Generalmente, $|\psi_0\rangle$ se prepara como un estado producto del espacio total $\mathcal{H}_T$ [48]; es decir, $|\psi_0\rangle = |x_0\rangle_p \otimes |c_0\rangle_c$, donde los subíndices p y c denotan la pertenencia de los estados a los espacios de Hilbert de la posición y de la moneda, respectivamente. Esto se realiza con la finalidad de simplificar tanto el análisis teórico como la implementación experimental.

En este proyecto implementamos caminatas cuánticas discretas en una línea (DQWL del inglés *discrete quantum walks on a line* [48]), las cuales constituyen un caso particular de DTQW, donde la evolución del sistema ocurre sobre una red unidimensional de posiciones etiquetadas por números enteros. Las DQWL emplean

una moneda de dos niveles, y el operador de desplazamiento mueve al caminante un paso hacia la derecha o la izquierda dependiendo de si el estado de la moneda es $|0\rangle_c$ o $|1\rangle_c$, respectivamente. Matemáticamente, este operador está dado por [48]

$$S = \sum_x \left(|x+1\rangle_p \langle x| \otimes |0\rangle_c \langle 0| + |x-1\rangle_p \langle x| \otimes |1\rangle_c \langle 1| \right). \quad (1.3)$$

Para comprender mejor la dinámica de este modelo, calcularemos los primeros dos pasos de evolución de un ejemplo sencillo de DQWL. Emplearemos el operador de moneda más utilizado en las DTQW: el operador de Hadamard, definido como

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|0\rangle_c \langle 0| + |0\rangle_c \langle 1| + |1\rangle_c \langle 0| - |1\rangle_c \langle 1| \right). \quad (1.4)$$

Supongamos que el caminante inicia en la posición $|0\rangle_p$ con la moneda preparada en el estado $(|0\rangle_c + i|1\rangle_c) / \sqrt{2}$. Para calcular el estado de la caminata en el primer paso temporal debemos aplicar el operador de evolución unitario de la ec. (1.1) al estado inicial de la caminata $|\psi_0\rangle$. Primero, el «lanzamiento» de la moneda mediante la aplicación de H sobre el estado inicial de la moneda coloca al sistema en una superposición de sus estados internos:

$$(\mathbb{1}_p \otimes H) |\psi_0\rangle = |0\rangle_p \otimes \frac{1}{2} \left[(1+i) |0\rangle_c + (1-i) |1\rangle_c \right] \quad (1.5)$$

y, posteriormente, la aplicación del operador de desplazamiento S mueve al caminante según su estado interno, obteniendo así que el estado de la caminata en $t = 1$ es

$$|\psi_1\rangle = S (\mathbb{1}_p \otimes H) |\psi_0\rangle = \frac{1}{2} \left[(1+i) |1\rangle_p \otimes |0\rangle_c + (1-i) |-1\rangle_p \otimes |1\rangle_c \right]. \quad (1.6)$$

Para calcular el estado en el segundo paso de tiempo ($t = 2$), aplicaremos nuevamente el operador U al estado anterior. Con la finalidad de simplificar la lectura, a partir de ahora prescindiremos de los subíndices p y c y escribiremos el producto tensorial de la forma $|a\rangle \otimes |b\rangle = |a, b\rangle$. Cuando el operador de moneda H actúa sobre los estados internos de $|\psi_1\rangle$, el sistema se expande a una superposición de cuatro términos:

$$(\mathbb{1}_p \otimes H) |\psi_1\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[(1+i) \left(|1, 0\rangle + |1, 1\rangle \right) + (1-i) \left(|-1, 0\rangle - |-1, 1\rangle \right) \right]. \quad (1.7)$$

Finalmente, al aplicar el operador S obtenemos:

$$|\psi_2\rangle = S (\mathbb{1}_p \otimes H) |\psi_1\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[(1+i) \left(|2, 0\rangle + |0, 1\rangle \right) + (1-i) \left(|0, 0\rangle - |-2, 1\rangle \right) \right]. \quad (1.8)$$

El proceso anterior ilustra cómo, a diferencia del caso clásico donde el caminante ocupa una única posición en cada paso, la naturaleza cuántica de la moneda lleva a que el sistema evolucione hacia una superposición de estados de posición. Este fenómeno es el que permite la aparición de interferencia cuántica, lo cual conduce a una dinámica de propagación drásticamente distinta a la de una caminata aleatoria, como veremos a continuación.

1.1.2. Distribución de probabilidad, valor esperado y varianza de una DQWL

La probabilidad de encontrar al caminante de una DTQW en la posición x en el tiempo t está dada por

$$P(x, t) = \sum_c |\langle x, c | \psi_t \rangle|^2, \quad (1.9)$$

donde la suma se realiza sobre los estados de la moneda. A partir de esta distribución, el valor esperado de la posición se define como el promedio ponderado de todas las posiciones posibles, donde los pesos están dados por la distribución de probabilidad de la posición del caminante:

$$\langle X \rangle_t := \sum_x x P(x, t). \quad (1.10)$$

En el caso clásico, una caminata aleatoria unidimensional con una moneda bi-dimensional no sesgada (es decir, una moneda con probabilidad $1/2$ de obtener cada cara), posee una distribución de probabilidad de la posición del caminante binomial simétrica alrededor de su posición inicial, lo cual resulta en un valor esperado de la posición nulo para todo t [44, 42]. Un desplazamiento medio distinto de cero solo aparece si se introduce un sesgo en la moneda, es decir, si las probabilidades de obtener cada cara son p y $1 - p$ con $p \neq 1/2$. En contraste, para una caminata cuántica el comportamiento del valor esperado de la posición está gobernado por la interferencia cuántica [19]. Por lo anterior, la elección del estado inicial de la moneda puede romper la simetría de la distribución de probabilidad incluso empleando una moneda no sesgada, es decir, un operador de moneda que produce probabilidades iguales para moverse hacia la izquierda y hacia la derecha al actuar sobre los estados base de la moneda [47], dando lugar a un valor esperado distinto de cero.

Adicionalmente, la varianza de la posición,

$$\sigma_t^2 = \langle X^2 \rangle_t - \langle X \rangle_t^2, \quad (1.11)$$

muestra una diferencia drástica en la tasa de dispersión entre una caminata aleatoria y una caminata cuántica. Mientras que la caminata aleatoria es un proceso difusivo donde la varianza crece linealmente con el tiempo ($\sigma^2 \propto t$) [44], la caminata cuántica presenta una propagación balística, donde la dispersión crece cuadráticamente ($\sigma^2 \propto t^2$) [48]. Este fenómeno es consecuencia directa de la interferencia y es altamente sensible a los parámetros del operador de la moneda y del estado inicial.

1.2. Paradoja de Parrondo

La paradoja de Parrondo es un fenómeno contraintuitivo de la teoría de juegos que establece que la combinación o alternancia de dos estrategias de juego o juegos que individualmente son perdedores (es decir, que en promedio llevan a una pérdida) puede resultar en una estrategia o juego ganador (que en promedio lleva a una ganancia) [1]. Este fenómeno se denomina «paradoja» porque desafía la intuición inmediata [17]: parece contradecir el sentido común al sugerir que «dos formas de perder» puedan combinarse para ganar. Sin embargo, no constituye una contradicción lógica ni viola las leyes de la probabilidad; al contrario, es un fenómeno completamente explicable dentro del marco de los procesos estocásticos [33].

Para ilustrar la paradoja, veremos ahora el ejemplo clásico introducido por G. P. Harmer y D. Abbott en 1999 en la ref. [16]. En este ejemplo, un jugador empieza con un capital (usualmente de cero unidades) y en cada turno elige jugar uno de dos juegos de azar (A y B), en los cuales deberá lanzar una moneda de acuerdo a las reglas del juego escogido. En ambos juegos, si el jugador obtiene cara, su capital incrementará en una unidad; mientras que si obtiene cruz, su capital disminuirá en una unidad. El juego A consiste en lanzar la moneda 1 que tiene probabilidad $1/2 - \varepsilon$ de caer en cara, siendo ε un número pequeño positivo (por ejemplo, 0.005). Jugar individualmente el juego A lleva en promedio a una pérdida, como se ilustra en la curva naranja de la fig. 1.2. Por otro lado, el juego B utiliza las monedas 2 y 3, cuya elección depende del capital acumulado del jugador: se utiliza la moneda 2 si el capital es múltiplo de un entero positivo M y se utiliza la moneda 3 en caso contrario. Tomando $M = 3$, la moneda 3 se juega con mayor frecuencia que la moneda 2. Si asignamos a la moneda 3 una probabilidad favorable de obtener cara, como $3/4 - \varepsilon$; pero asignamos a la

moneda 2 una probabilidad muy baja de obtener cara, como $1/10 - \varepsilon$, entonces el efecto desfavorable de la moneda 2 superará al efecto de la moneda 3. Por lo anterior, el juego B individualmente también llevará en promedio a una pérdida, como se visualiza en la curva roja de la fig. 1.2. Sin embargo, si alternamos de forma periódica dos juegos de A seguidos de dos de B, o si se alternan los juegos A y B de manera aleatoria, ocurrirá un rápido incremento del capital, como se ilustra en las curvas verde y azul de la fig. 1.2.

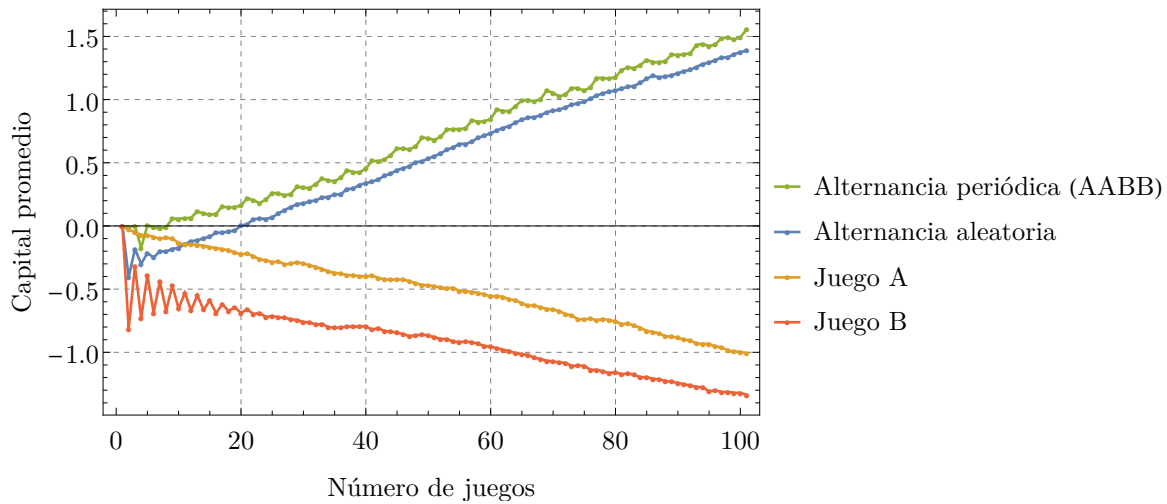


Figura 1.2. Reproducción del ejemplo propuesto por G. P. Harmer y D. Abbott para ilustrar la paradoja de Parrondo. Cada juego es individualmente perdedor; sin embargo, al alternarlos de manera periódica (AABB) o aleatoria, emerge un comportamiento ganador. Los resultados se promediaron a partir de 10 000 simulaciones de 100 juegos cada una.

La paradoja se resuelve al notar que los juegos no son independientes: comparten el mismo capital del jugador, lo que genera una interacción no lineal entre ellos. La dinámica del juego B por sí solo hace que el capital pase mucho tiempo en los estados desfavorables, atrapándolo en ciclos que producen una pérdida neta a largo plazo. Sin embargo, al alternar con el juego A, este último actúa como un «mezclador»: cada vez que se juega A, el capital sube o baja casi al azar (con probabilidades muy parecidas), rompiendo los ciclos y reduciendo significativamente la frecuencia de veces que se usa la moneda desfavorable de B. Como resultado, el sistema pasa más tiempo en los estados favorables de B (donde la probabilidad de ganar es muy alta), lo que invierte la tendencia y convierte la combinación de los juegos en una estrategia ganadora.

1.2.1. Origen de la paradoja de Parrondo

Los juegos de Parrondo son un conjunto de juegos de azar o de estrategias que ilustran la paradoja de Parrondo. Estos juegos surgieron como una analogía pedagógica de una versión discreta del trinquete browniano intermitente, formulada por J. M. R. Parrondo en 1996 [1]. El trinquete browniano intermitente puede visualizarse como un conjunto de partículas brownianas (*i. e.*, partículas suspendidas en un fluido que experimentan movimiento aleatorio debido a colisiones constantes con las moléculas del fluido circundante) que se mueven en una pendiente que alterna de forma intermitente entre dos perfiles: uno plano y otro en forma de dientes de sierra asimétricos [16, 36], como los que se muestran en la fig. 1.3. Las partículas brownianas tienden a desplazarse hacia abajo tanto en la pendiente plana como en la que tiene forma de dientes de sierra. A pesar de ello, la alternancia entre ambos perfiles genera un movimiento neto ascendente de las partículas [16, 36].

Para entender cómo funciona el trinquete browniano intermitente, imaginemos que se dejan caer partículas brownianas en el punto C de la fig. 1.3 con el perfil plano activado. Las partículas se dispersarán en ambas direcciones, con un sesgo de moverse hacia abajo. Si se «enciende» el perfil de dientes de sierra justo antes de que alguna partícula pase el punto D, entonces las partículas que se desplazaron ligeramente hacia arriba, logrando atravesar el punto B, tenderán a caer en el valle del punto A, y el resto tenderán al valle del punto de partida C. Luego de varias repeticiones se observa que el movimiento promedio de las partículas es ascendente, contrario a lo que sucede con cada perfil de manera individual [36, 18].

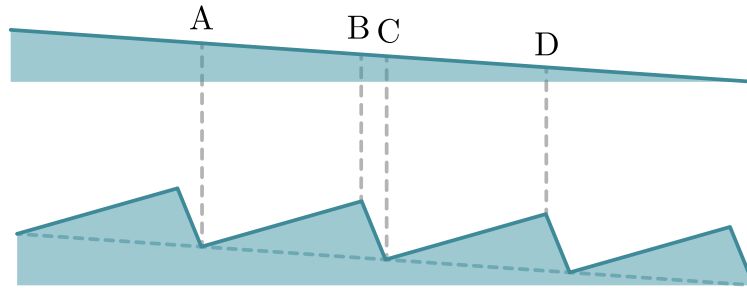


Figura 1.3. Esquema ilustrativo del mecanismo del trinquete browniano intermitente.

Aunque ya se conocían fenómenos relacionados, Parrondo fue el primero en mostrar el efecto con una formulación clara de teoría de juegos [1]. Con el tiempo, la paradoja ha encontrado aplicaciones en diversos campos además de la física estadística [18], como la biología [46, 6, 9, 51, 50], la economía [45, 27] y la dinámica social [52, 23, 24]; extendiéndose incluso al ámbito de la información cuántica [41, 37].

En particular, su emergencia en las caminatas cuánticas discretas en el tiempo resulta de gran interés, ya que estas constituyen modelos versátiles para el estudio de fenómenos cuánticos y pueden ser implementadas experimentalmente de diferentes formas, siendo algunas de ellas las que emplean plataformas fotónicas [34], trampas de iones [54] o cúbits superconductores [14].

1.2.2. Paradoja de Parrondo en DTQW

En el contexto de las caminatas cuánticas discretas en el tiempo, la elección de un operador de moneda cuántica junto con un estado inicial de la caminata es análoga a la elección de una estrategia para conseguir que el caminante se mueva en una dirección preferencial [32]. Una forma común de definir una estrategia como ganadora o perdedora en una DQWL es mediante la tendencia del valor esperado del operador de posición en función del tiempo [2, 32]: debido a que el valor esperado de la posición describe la posición media del caminante tras un número dado de pasos temporales, una tendencia positiva a lo largo del tiempo corresponde a una estrategia ganadora, mientras que una tendencia negativa corresponde a una perdedora [2, 32].

La investigación de la emergencia de la paradoja en caminatas cuánticas discretas en el tiempo fue precedida por el estudio del mismo fenómeno en un modelo equivalente: autómatas cuánticos unidimensionales de gas reticular con una única partícula [43]; para lo cual emplearon un potencial dependiente de la posición y del tiempo [30, 31] (y ruido [29]). Más tarde empezaría la búsqueda de la emergencia de la paradoja de Parrondo en las DTQW, siendo la primera aproximación en la ref. [12], donde estudiaron un fenómeno relacionado: mostraron que combinando un juego sesgado (una DTQW multimoneda donde el lanzamiento de la moneda en cada paso de tiempo depende de lanzamientos previos) y uno no sesgado (una DQWL con moneda homogénea) se puede obtener un resultado con sesgo contrario al primer juego. Posteriormente, en la ref. [2] demostraron que la paradoja puede surgir no solo mediante secuencias periódicas de estrategias (como se había hecho hasta ese momento), sino también mediante la mezcla aleatoria de las mismas; empleando una DQWL dependiente de la posición. En el mismo artículo (ref. [2]) propusieron un modelo de DTQW cooperativa para hacer emerger la paradoja.

Los autores de la ref. [2] advirtieron que, el efecto de la paradoja de Parrondo en las DTQW podría desvanecerse a tiempos largos y algunos autores [11, 26] empezaron a reportar que efectivamente la paradoja era transitoria para sus modelos propuestos. Ante esta problemática, en la ref. [39] optaron por emplear un sistema

con dos monedas cuánticas (y posteriormente con tres monedas [40]) para implementar la paradoja de Parrondo «genuina» (que perdurara incluso en el límite asintótico). Con el mismo objetivo, aparecieron algunas propuestas [22, 25] que recurren a caminatas de alta dimensión y otros enfoques en donde se introduce ruido [49, 3]. Si bien estos métodos han demostrado con éxito la emergencia de la paradoja en caminatas cuánticas discretas, algunos autores han optado por utilizar monedas no homogéneas para lograr efectos similares en modelos más simples de caminatas. Por ejemplo, en las refs. [38, 32] emplearon monedas dependientes del tiempo, mientras que en las refs. [3, 32] utilizaron monedas dependientes de la posición.

Aunque la paradoja de Parrondo ha sido ampliamente investigada, aún existen aspectos abiertos en su manifestación dentro de las caminatas cuánticas. En particular, poco se ha investigado su emergencia en un escenario más sencillo de caminatas cuánticas: el de una DQWL con monedas exclusivamente homogéneas. En las refs. [5, 11] emplean monedas homogéneas que alternan en cada paso de tiempo de una DQWL, mientras que en la ref. [26] emplean monedas homogéneas que combinan según la posición del caminante. A pesar de ello, en la ref. [5] demuestran realmente que alternando juegos sesgados es posible obtener un juego no sesgado, lo cual es un fenómeno distinto a la paradoja de Parrondo; mientras que en las refs. [11, 26], reportan que obtuvieron un resultado transitorio, *i. e.*, el efecto paradójico se desvanece en tiempos suficientemente largos. En este trabajo presentamos la primera verificación reportada de la emergencia de la paradoja de Parrondo en una DQWL utilizando exclusivamente monedas homogéneas, cuya manifestación perdura en el tiempo.

2. RESULTADOS

En este capítulo presentamos los resultados obtenidos tras el estudio de la paradoja de Parrondo en el escenario más simple de una DTQW. En la sec. 2.1 definimos qué es una estrategia y los criterios para su clasificación como ganadora, perdedora, nula o indeterminada. Establecemos cómo se realiza la combinación de estrategias y delimitamos el conjunto de estrategias a estudiar. Posteriormente, en la sec. 2.2 establecemos un método para clasificar las estrategias individuales de forma sistemática, empleando relaciones geométricas entre sus parámetros. Identificamos además las condiciones que deben cumplir las estrategias a combinar para que emerja la paradoja. Finalmente, en la sec. 2.3 construimos diagramas de fase que delimitan las regiones en las cuales emerge este fenómeno.

2.1. Parametrización del problema en el escenario más simple

En el contexto de las DTQW, una estrategia (o juego de Parrondo) se construye tomando un operador de moneda y un estado inicial de la caminata. En este trabajo, los operadores de moneda que utilizaremos serán elementos del grupo $SU(2)$, el cual describe todas las posibles rotaciones de la esfera de Bloch. Sus elementos pueden expresarse de forma general como

$$C(\theta, \alpha, \phi) = e^{-i \frac{\theta}{2} \hat{n}(\alpha, \phi) \cdot \vec{\sigma}}, \quad (2.1)$$

donde $\hat{n}$ es un vector unitario en $\mathbb{R}^3$ que corresponde al eje de rotación, descrito por los ángulos polar α y azimutal ϕ ; θ es el ángulo de rotación alrededor de dicho eje, y $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ es un vector compuesto por las matrices de Pauli. Para los estados iniciales de la caminata emplearemos estados producto $|\psi_0\rangle = |x_0, c_0\rangle$ con posición inicial localizada (*i. e.*, el caminante se encontrará con certeza en un único sitio de la red al inicio de la caminata) y superposición en el estado inicial de la moneda:

$|c_0(\beta, \gamma)\rangle = \cos(\beta/2) |0\rangle + e^{i\gamma} \sin(\beta/2) |1\rangle$. Dado que el operador de moneda empleado es homogéneo, la dinámica de la caminata cuántica es traslacionalmente invariante, es decir, un desplazamiento en el estado inicial de la posición no altera las propiedades estadísticas del sistema [48]. Por lo anterior, fijaremos el estado inicial de la posición en $|x_0\rangle = |0\rangle$, sin pérdida de generalidad.

En este trabajo definimos una estrategia como ganadora, perdedora, nula o indeterminada de acuerdo al comportamiento a lo largo del tiempo del valor esperado de la posición de la DQWL correspondiente. Una estrategia es ganadora si la tendencia de su valor esperado de la posición en función del tiempo es positiva, como se muestra en las figs. 2.1a y 2.2a; es perdedora si su valor esperado de la posición en función del tiempo muestra una tendencia negativa, como se observa en las figs. 2.1b y 2.2b; es nula si su valor esperado de la posición es igual a cero para todo t , como se ilustra en la fig. 2.1c; o es indeterminada si no puede ser clasificada como ninguna de las anteriores, como se ejemplifica en la fig. 2.2c.

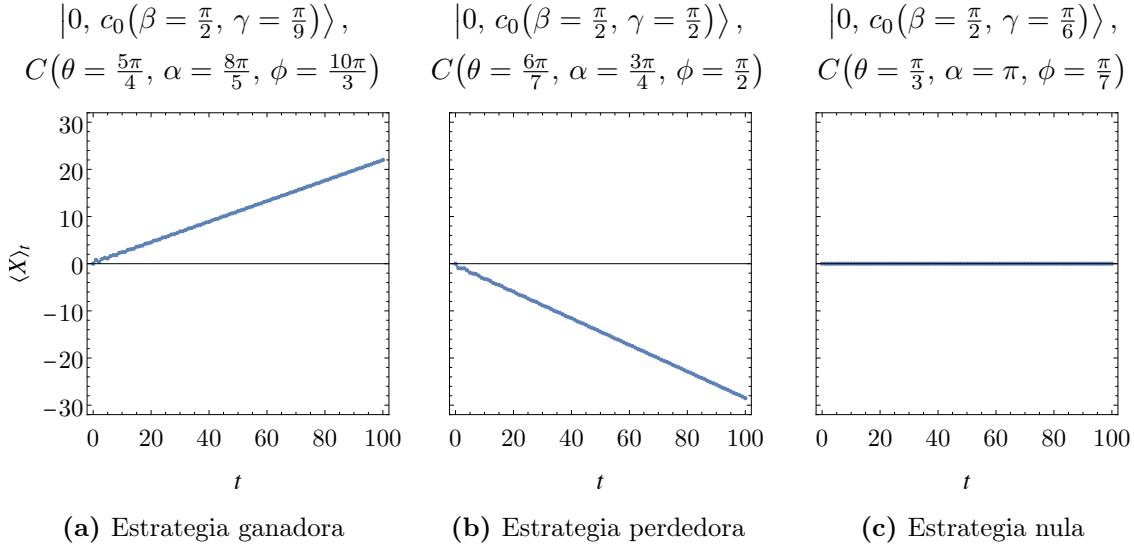


Figura 2.1. Clasificación de estrategias de acuerdo a la tendencia de su valor esperado de la posición en el tiempo: (a) tendencia positiva, (b) tendencia negativa, (c) tendencia constante (nula).

El estudio de la paradoja de Parrondo, en este trabajo, requiere analizar combinaciones de dos estrategias con el mismo estado inicial. Para ello, consideramos la dinámica total como la aplicación sucesiva de dos monedas C_1 y C_2 , seguida del operador de desplazamiento condicional S ; *i. e.*,

$$U = S(1_p \otimes C_3) = S(1_p \otimes C_2 \cdot C_1). \quad (2.2)$$

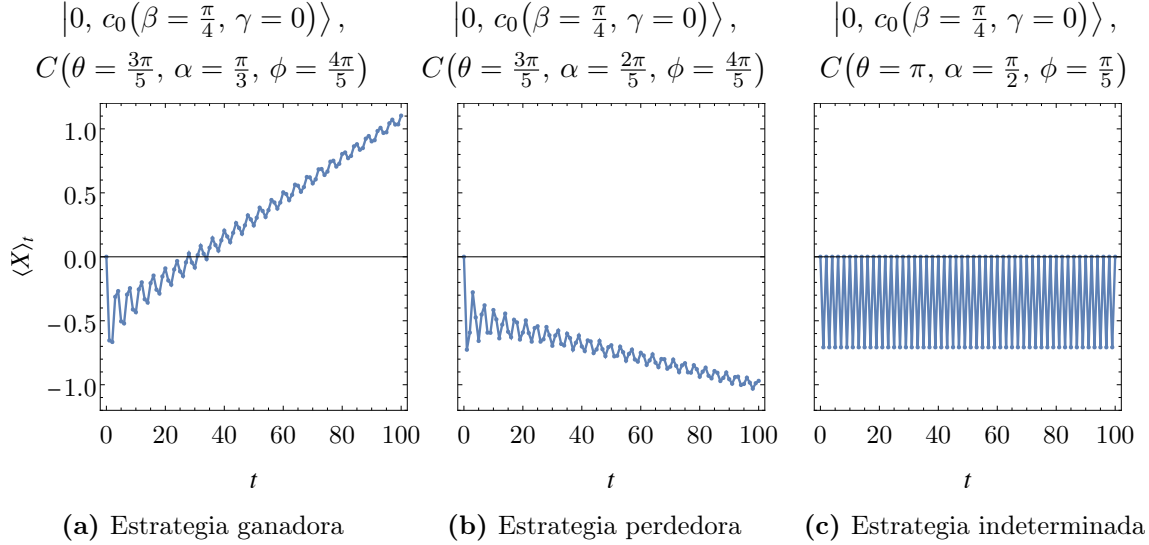


Figura 2.2. Clasificación de estrategias con comportamientos oscilatorios. (a) Tendencia positiva a tiempos largos, (b) tendencia negativa a tiempos largos, (c) tendencia indeterminada: el valor esperado de la posición es negativo para valores de tiempo impares y nulo para valores pares.

Al combinar dos estrategias obtenemos una nueva que depende de ocho parámetros reales: tres por cada moneda y dos del estado inicial común. Este espacio de parámetros es demasiado complejo para un estudio sistemático, por lo que nos restringiremos a un caso particular que sigue siendo de interés. Impondremos dos condiciones: (1) que el estado inicial de la moneda se sitúe en el plano xy de la esfera de Bloch ($\beta = \pi/2$), y (2) que ambas monedas compartan el mismo eje de rotación, es decir

$$C_1 = C_1(\theta_1, \alpha, \phi); \quad C_2 = C_2(\theta_2, \alpha, \phi). \quad (2.3)$$

Con estas restricciones, la caracterización de dos estrategias combinadas queda reducida a cinco parámetros reales independientes: el ángulo azimutal γ del estado inicial de la moneda, los ángulos polar α y azimutal ϕ del eje de rotación común a ambas monedas y los ángulos de rotación θ_1 y θ_2 de cada una.

2.2. Clasificación de estrategias variando un parámetro

Fijando un estado inicial de la moneda ubicado en el plano xy de la esfera de Bloch $|c_0(\beta = \pi/2, \gamma)\rangle$ y un eje de rotación $\hat{n}(\alpha, \phi)$, determinaremos los intervalos de valores de θ que producen estrategias ganadoras o perdedoras. Para ello, analizaremos

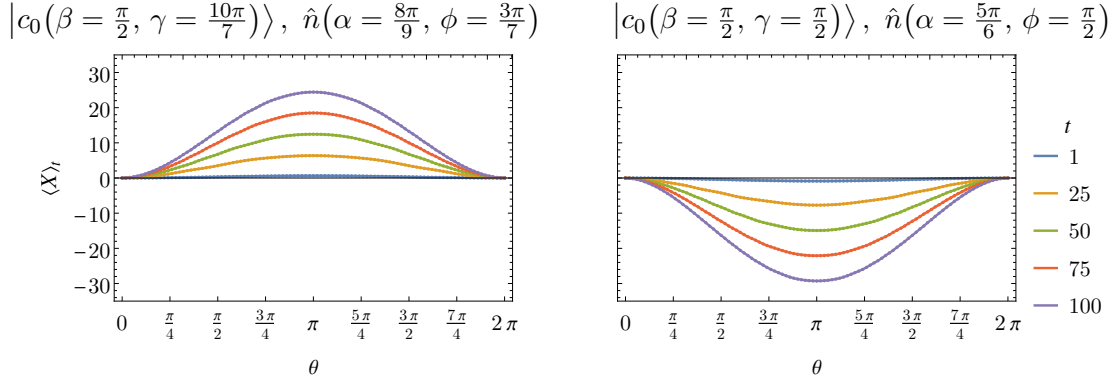
el comportamiento del valor esperado de la posición en función de θ a través del tiempo. Por ejemplo, en la fig. 2.3d se observa que, para el estado inicial de la moneda $|c_0(\beta = \pi/2, \gamma = 0)\rangle$, las estrategias $C(\theta, \alpha = 3\pi/4, \phi = \pi/2)$ con $\theta \in (0, \pi)$ generan un valor esperado de la posición con tendencia negativa conforme avanza el tiempo, por lo que estos valores de θ producen estrategias perdedoras. En contraste, cuando $\theta \in (\pi, 2\pi)$, el valor esperado de la posición muestra una tendencia positiva, por lo que dichos valores del ángulo de rotación producen estrategias ganadoras.

Los intervalos anteriores están delimitados por el ángulo de rotación no nulo para el cual el valor esperado de la posición es cero para todo t . A este valor lo denominaremos *ángulo de rotación crítico* (θ_c) porque delimita la transición entre estrategias perdedoras y ganadoras: todo $\theta \in (0, \theta_c)$ produce estrategias de un tipo (ganadoras o perdedoras) y todo $\theta \in (\theta_c, 2\pi)$ produce estrategias del tipo contrario.

Para cualquier configuración fija $\{|c_0(\beta = \pi/2, \gamma)\rangle, \hat{n}(\alpha, \phi)\}$, el valor trivial $\theta = 0$ anula el valor esperado de la posición para todo t . Como se deduce en el apéndice A, de acuerdo a las relaciones geométricas entre el estado inicial de la moneda y el eje de rotación, puede darse uno de estos tres escenarios: (1) aparece un único valor de θ que anula el valor esperado de la posición (el valor trivial), (2) aparecen dos valores de θ que anulan el valor esperado de la posición (el trivial y el valor crítico), o (3) todos los valores de $\theta \in [0, 2\pi)$ anulan el valor esperado de la posición.

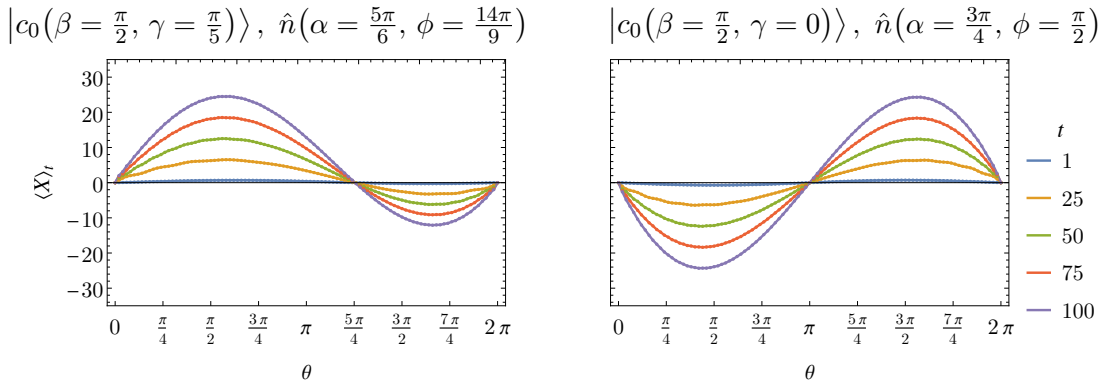
Cuando el eje de rotación se ubica fuera de los polos y del ecuador de la esfera de Bloch ($\sin \alpha \neq 0$ y $\cos \alpha \neq 0$), y además su proyección en el plano xy es paralela o antiparalela al vector de Bloch del estado inicial de la moneda [$\sin(\gamma - \phi) = 0$], la solución trivial constituye el único ángulo de rotación que anula el valor esperado de la posición para todo t . En tal caso, todos los valores de $\theta \in (0, 2\pi)$ generan estrategias de un solo tipo, ya sea exclusivamente ganadoras (fig. 2.3a) o exclusivamente perdedoras (fig. 2.3b). Los resultados numéricos indican que, si el eje de rotación se encuentra en el hemisferio norte [$\alpha \in (0, \pi/2)$], las estrategias resultan ganadoras cuando la distancia azimutal es nula [$(\gamma - \phi) \bmod 2\pi = 0$], y perdedoras cuando esta equivale a π [$(\gamma - \phi) \bmod 2\pi = \pi$]. Dicho comportamiento se invierte si el eje de rotación se sitúa en el hemisferio sur [$\alpha \in (\pi/2, \pi)$].

Por otro lado, cuando el eje de rotación se ubica fuera de los polos de la esfera de Bloch ($\sin \alpha \neq 0$) y además su proyección en el plano xy no es paralela ni antiparalela al vector de Bloch del estado inicial de la moneda [$\sin(\gamma - \phi) \neq 0$], aparece un único θ no nulo que anula el valor esperado de la posición para todo t . Este es el valor crítico



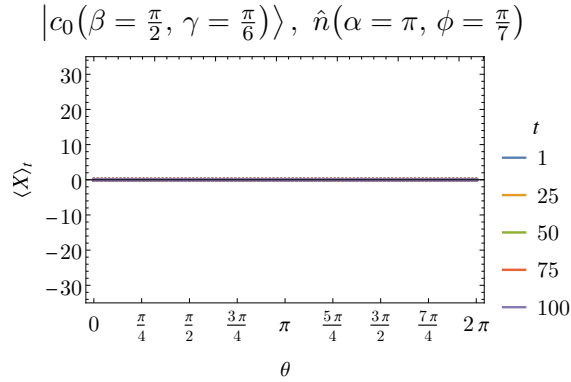
(a) Todos los valores de $\theta \in (0, 2\pi)$ producen estrategias ganadoras.

(b) Todos los valores de $\theta \in (0, 2\pi)$ producen estrategias perdedoras.



(c) El valor $\theta_c \approx 3.94091$ delimita dos intervalos: estrategias ganadoras $[\theta \in (0, \theta_c)]$ y estrategias perdedoras $[\theta \in (\theta_c, 2\pi)]$.

(d) El valor $\theta_c = \pi$ delimita dos intervalos: estrategias perdedoras $[\theta \in (0, \theta_c)]$ y estrategias ganadoras $[\theta \in (\theta_c, 2\pi)]$.



(e) No existen estrategias ganadoras ni perdedoras.

Figura 2.3. Valor esperado de la posición en función del ángulo de rotación de la estrategia para los tiempos $t = 1, 2, \dots, 5$. Para valores fijos de α, ϕ y γ ocurre uno de los siguientes tres escenarios: en (a) y (b) aparece un único valor de θ que anula el valor esperado de la posición (el valor trivial); en (c) y (d) aparecen dos valores de θ que anulan el valor esperado de la posición (el valor trivial y el crítico); y en (e) todos los valores de $\theta \in [0, 2\pi)$ anulan el valor esperado de la posición.

dado por:

$$\theta_c = \begin{cases} \pi & \text{si } \cos \alpha = 0 \text{ o } \cos(\gamma - \phi) = 0, \\ 2 \arctan \left[-\frac{\tan(\gamma - \phi)}{\cos \alpha} \right] \text{ mód } 2\pi & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (2.4)$$

En este caso, todos los valores de $\theta \in (0, \theta_c)$ producen estrategias de un tipo (ganadoras o perdedoras), mientras que los valores de $\theta \in (\theta_c, 2\pi)$ producen estrategias del tipo contrario. Como indican los resultados numéricos, el tipo de estrategia asociado a cada intervalo está determinado por la diferencia azimutal entre el estado inicial de la moneda y el eje de rotación. Cuando $(\gamma - \phi) \text{ mód } 2\pi \in (0, \pi)$ observamos que los valores de $\theta \in (0, \theta_c)$ producen estrategias ganadoras, mientras que $\theta \in (\theta_c, 2\pi)$ produce estrategias perdedoras (ver ejemplo en la fig. 2.3c). Por el contrario, cuando $(\gamma - \phi) \text{ mód } 2\pi \in (\pi, 2\pi)$ observamos que el primer intervalo produce estrategias perdedoras, mientras que el segundo produce estrategias ganadoras (ver ejemplo en la fig. 2.3d).

Finalmente, si el eje de rotación se ubica en los polos de la esfera de Bloch ($\sin \alpha = 0$), o si este es colineal con el vector de Bloch del estado inicial de la moneda [$\cos \alpha = 0$ y $\sin(\gamma - \phi) = 0$], entonces todos los valores de $\theta \in [0, 2\pi)$ anulan el valor esperado de la posición. Por lo tanto, para este caso no existen estrategias ganadoras ni perdedoras en todo el intervalo (ver fig. 2.3e).

Llegados a este punto, sabemos clasificar estrategias a partir de la cantidad de valores de θ que anulan el valor esperado de la posición y de ciertas condiciones asociadas a sus parámetros γ , α y ϕ . Analicemos ahora cómo emerge la paradoja de Parrondo: buscamos dos estrategias perdedoras que combinadas produzcan un resultado ganador. Considerando que el eje de rotación es el mismo para las monedas que se seleccionen [cf. ec. (2.3)], la combinación estará dada por

$$C_2(\theta_2, \alpha, \phi) \cdot C_1(\theta_1, \alpha, \phi) = C_3(\theta_3, \alpha, \phi); \quad (2.5)$$

donde $\theta_3 = (\theta_1 + \theta_2) \text{ mód } 2\pi$. Es decir, buscamos dos valores θ_1 y θ_2 que produzcan estrategias perdedoras, tales que θ_3 produce una estrategia ganadora. Ya que las monedas C_1 , C_2 y C_3 comparten el mismo eje de rotación $\hat{n}(\alpha, \phi)$, se hace evidente que para producir la paradoja requerimos tomar configuraciones $\{|c_0(\beta = \pi/2, \gamma)\rangle, \hat{n}(\alpha, \phi)\}$ para las cuales exista un ángulo de rotación crítico, pues necesitamos que para un mismo estado inicial de la moneda y un mismo eje de rotación existan estrategias tanto ganadoras como perdedoras. Por lo anterior, solo serán de nuestro interés las

configuraciones que satisfagan $\sin \alpha \neq 0$ y $\sin(\gamma - \phi) \neq 0$.

2.3. Diagramas de fase de la emergencia de la paradoja

En la sección anterior establecimos las condiciones matemáticas sobre los parámetros de una estrategia individual para que esta sea ganadora, perdedora o nula. En esta sección presentaremos diagramas de fase en donde, dados un estado inicial de la moneda en el plano xy de la esfera de Bloch y un eje de rotación, se establecen las fases de la emergencia de la paradoja de Parrondo variando los ángulos de rotación de las estrategias a combinar.

Primero, observemos un ejemplo de la emergencia de la paradoja de Parrondo. Consideremos el estado inicial de la moneda y el eje de rotación de la fig. 2.3d: $|c_0(\beta = \pi/2, \gamma = 0)\rangle$ y $\hat{n}(\alpha = 3\pi/4, \phi = \pi/2)$. Para estos parámetros, aparece el ángulo de rotación crítico $\theta_c = \pi$. Como muestra la figura, los valores de θ en el intervalo $(0, \theta_c = \pi)$ producen estrategias perdedoras, mientras que los demás generan estrategias ganadoras. Por lo tanto, si elegimos ángulos de rotación $\theta_1, \theta_2 \in (0, \pi)$ de modo que su suma satisfaga $(\theta_1 + \theta_2) \bmod 2\pi \in (\pi, 2\pi)$, emergerá la paradoja de Parrondo. Un ejemplo de esto se ilustra en la fig. 2.4, donde se han tomado los valores $\theta_1 = 3\pi/4$ y $\theta_2 = 7\pi/8$ que producen individualmente estrategias perdedoras, como se muestra en las figs. 2.4a y 2.4b; y al combinarse producen la estrategia ganadora con ángulo de rotación $\theta_3 = 13\pi/8$, como se muestra en la fig. 2.4c.

Para este punto contamos con los elementos necesarios para construir los *diagramas de fase de Parrondo* en función de los ángulos de rotación θ_1 y θ_2 . La ec. (2.4) proporciona el ángulo de rotación crítico que delimita los intervalos de valores de θ que producen estrategias ganadoras y perdedoras. Este ángulo, a su vez, establece las desigualdades que definen las distintas fases que se producen al combinar estrategias, las cuales se visualizan en los diagramas de fase mostrados en la fig. 2.5. Para facilitar la interpretación, las estrategias ganadoras se denotarán mediante la letra «W» (del inglés *winning*) y las perdedoras con la «L» (del inglés *losing*). Aparecen seis fases: las paradójicas, $L \circ L = W$ y $W \circ W = L$; las intuitivas, $L \circ L = L$ y $W \circ W = W$; y las mixtas, $L \circ W = W$ junto con $W \circ L = W$ y $L \circ W = L$ junto con $W \circ L = L$. Sin embargo, dado que las rotaciones alrededor del mismo eje conmutan, la composición de estrategias cumple la propiedad conmutativa ($L \circ W = W \circ L$), reduciendo las fases mixtas a únicamente dos independientes: $L \circ W = W \circ L = W$ y $L \circ W = W \circ L = L$.

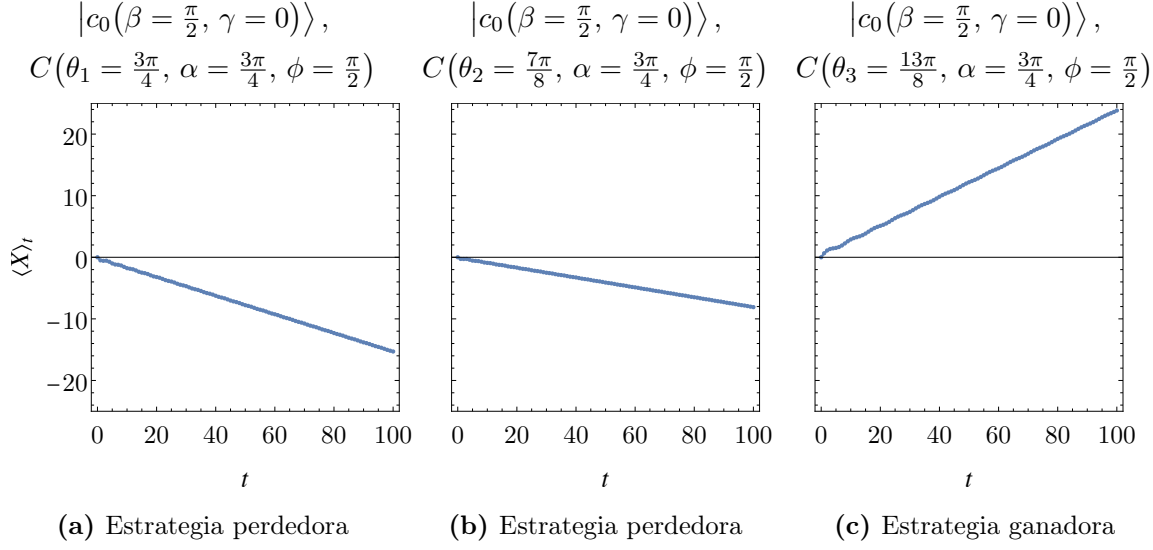


Figura 2.4. Ejemplo de la emergencia de la paradoja de Parrondo. Los valores individuales $\theta_1 = 3\pi/4$ y $\theta_2 = 7\pi/8$ producen resultados perdedores, como se muestra en los paneles (a) y (b). Sin embargo, al combinarlos, *i. e.*, al emplear $\theta_3 = \theta_1 + \theta_2 = 13\pi/8$, se obtiene un resultado ganador, tal como se observa en el panel (c).

Existen dos diagramas de fase típicos determinados por la condición que satisface la diferencia azimutal entre el vector de Bloch del estado inicial de la moneda y el eje de rotación. En la fig. 2.5a se muestra un ejemplo en el que se satisface la condición $(\gamma - \phi) \bmod 2\pi \in (0, \pi)$. Para esta condición, las fases están gobernadas por las desigualdades

$$\begin{cases} 0 < \theta < \theta_c & \rightarrow \text{W}, \\ \theta_c < \theta < 2\pi & \rightarrow \text{L}. \end{cases} \quad (2.6)$$

Por otro lado, en la fig. 2.5b se ilustra el diagrama de fase para los parámetros del ejemplo de la emergencia de la paradoja analizado al inicio de esta sección, en donde se cumple que $(\gamma - \phi) \bmod 2\pi \in (\pi, 2\pi)$. Bajo esta condición, los intervalos ganadores y perdedores se intercambian, dando lugar a las desigualdades

$$\begin{cases} 0 < \theta < \theta_c & \rightarrow \text{L}, \\ \theta_c < \theta < 2\pi & \rightarrow \text{W}. \end{cases} \quad (2.7)$$

Debido a que el conjunto $\{\theta_1, \theta_2, \theta_1 + \theta_2\}$ es invariante bajo el intercambio de θ_1 y θ_2 , los diagramas de fase son simétricos respecto a la diagonal $\theta_1 = \theta_2$.

En ambos diagramas de fase mostrados en la fig. 2.5, la región sombreada en azul señala la emergencia de la paradoja de Parrondo. Cualquier par de ángulos de rotación θ_1 y θ_2 cuya tupla (θ_1, θ_2) se halle contenida en la región azul, producirán dos

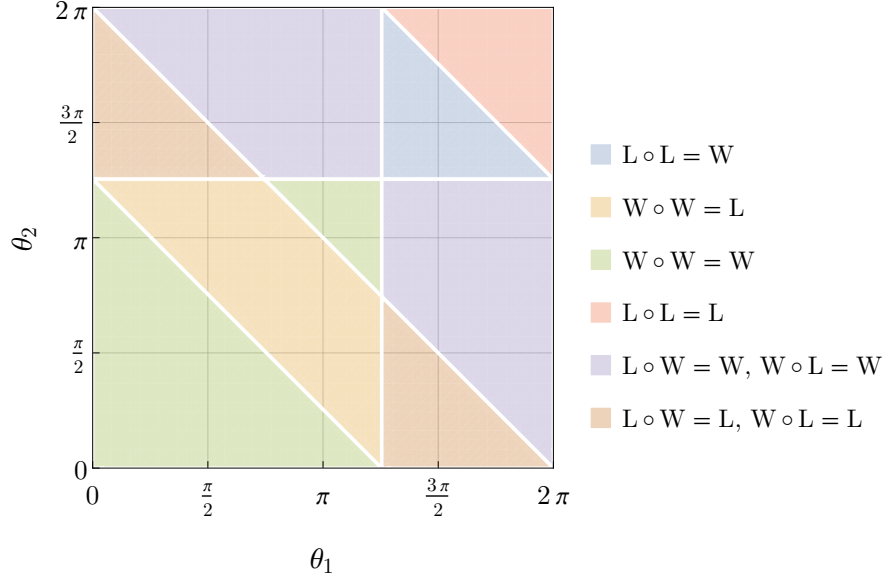
estrategias individualmente perdedoras que, al combinarse, darán lugar a una estrategia ganadora. Anteriormente analizamos un ejemplo de la emergencia de la paradoja de Parrondo en donde se consideró el estado inicial de la moneda $|c_0(\beta = \pi/2, \gamma = 0)\rangle$ y el eje de rotación $\hat{n}(\alpha = 3\pi/4, \phi = \pi/2)$. Los valores seleccionados para ilustrar el fenómeno, $\theta_1 = 3\pi/4$ y $\theta_2 = 7\pi/8$, se hallan efectivamente contenidos en la región azul del diagrama de fase de la fig. 2.5b.

Los diagramas de fase permiten además identificar otros fenómenos que surgen debido a distintas combinaciones de estrategias. Entre ellos destaca el fenómeno paradójico inverso al anterior, al que denominaremos *anti-Parrondo*, que emerge en el área sombreada en amarillo y en el cual la combinación de dos estrategias ganadoras conduce a una dinámica perdedora. Por otro lado, el color blanco representa configuraciones para las cuales el valor esperado de la posición se anula. Las líneas blancas verticales y horizontales del borde del diagrama y de las fronteras entre regiones indican estrategias nulas individuales, caracterizadas por $\theta_i \bmod 2\pi = 0$ y $\theta_i = \theta_c$, con $i = 1, 2$, respectivamente; mientras que las líneas blancas diagonales representan estrategias compuestas nulas, definidas por $(\theta_1 + \theta_2) \bmod 2\pi = 0$ y $(\theta_1 + \theta_2) \bmod 2\pi = \theta_c$.

Cuando se fija una configuración de parámetros $\{|c_0(\beta = \pi/2, \gamma)\rangle, \hat{n}(\alpha, \phi)\}$ tal que el único valor de θ que anula el valor esperado de la posición es el trivial, todos los valores de $\theta \in (0, 2\pi)$ producen estrategias de un mismo tipo, ya sean ganadoras o perdedoras. En consecuencia, el diagrama de fase aparece uniformemente coloreado de rojo o verde; con excepción de su borde, que corresponde a las líneas en donde $\theta_1 \bmod 2\pi = 0$ y $\theta_2 \bmod 2\pi = 0$, y de la antidiagonal principal, definida por $\theta_2 = 2\pi - \theta_1$. Estas líneas se muestran en color blanco porque corresponden a configuraciones en las que las estrategias individuales o la estrategia combinada son nulas. En particular, el resto del diagrama estará pintado de rojo si todas las estrategias producidas por $\theta \in (0, 2\pi)$ son perdedoras y su combinación produce un resultado perdedor ($L \circ L = W$); o de verde si tanto las estrategias individuales como su combinación son ganadoras ($W \circ W = L$). En contraste, si para un eje de rotación y un estado inicial de la moneda sobre el plano xy todos los valores de $\theta \in [0, 2\pi)$ anulan el valor esperado de la posición, el diagrama de fase se verá completamente blanco, indicando que todas las estrategias individuales y su combinación son nulas.

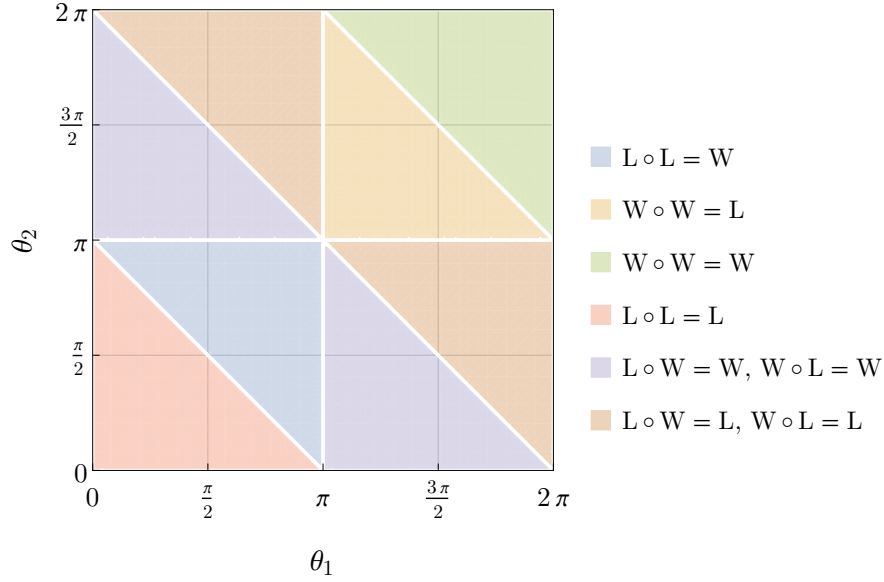
En resumen, en este capítulo desarrollamos un análisis de la emergencia de la paradoja de Parrondo en una DQWL con monedas homogéneas pertenecientes a $SU(2)$; combinando dos estrategias con el mismo eje de rotación y estado inicial, con posición inicial localizada en $|0\rangle$ y estado inicial de la moneda sobre el plano xy de la esfera de Bloch. Realizamos una clasificación de las estrategias individuales en función del

$$|c_0(\beta = \frac{\pi}{2}, \gamma = \frac{\pi}{5})\rangle, \hat{n}(\alpha = \frac{5\pi}{6}, \phi = \frac{14\pi}{9})$$



(a) Los parámetros del estado inicial de la moneda y del eje de rotación cumplen $(\gamma - \phi) \bmod 2\pi \in (0, \pi)$.

$$|c_0(\beta = \frac{\pi}{2}, \gamma = 0)\rangle, \hat{n}(\alpha = \frac{3\pi}{4}, \phi = \frac{\pi}{2})$$



(b) Los parámetros del estado inicial de la moneda y del eje de rotación cumplen $(\gamma - \phi) \bmod 2\pi \in (\pi, 2\pi)$.

Figura 2.5. Diagramas de fase de la emergencia de la paradoja de Parrondo (región azul: $L \circ L = W$). La diferencia azimutal entre el estado inicial de la moneda y el eje de rotación determinan el tipo de estrategias para $\theta \in (0, \theta_c)$ y $\theta \in (\theta_c, 2\pi)$, produciendo dos tipos de diagramas de fase.

ángulo de rotación θ , fijando los demás parámetros del estado inicial de la moneda y del operador de la moneda. A partir de esta clasificación, construimos diagramas de fase en el espacio (θ_1, θ_2) que revelan las regiones donde la combinación de dos estrategias da lugar a la paradoja de Parrondo y otros fenómenos.

CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO

En este trabajo presentamos la primera verificación reportada de la emergencia de la paradoja de Parrondo en caminatas cuánticas discretas en una línea utilizando exclusivamente monedas homogéneas, cuya manifestación perdura en el tiempo. Los resultados obtenidos contrastan con investigaciones previas (refs. [11, 26]) cuyos modelos también emplean monedas homogéneas, pero en las cuales el comportamiento paradójico se desvanece para un número suficientemente grande de pasos temporales. En este trabajo, una estrategia está conformada por un estado inicial de la caminata y un operador de moneda. En particular, estudiamos la emergencia de la paradoja mediante la combinación de dos estrategias con el mismo estado inicial, empleando operadores de $SU(2)$ como monedas cuánticas. Con el fin de reducir la complejidad del espacio de parámetros a estudiar, tomamos estados iniciales de la moneda en el plano ecuatorial de la esfera de Bloch y combinamos monedas con el mismo eje de rotación. A continuación, resumimos los principales resultados obtenidos a partir de este análisis.

Establecimos un método sistemático para clasificar estrategias basado en relaciones geométricas de sus parámetros. Para configuraciones genéricas con un estado inicial de la moneda y un eje de rotación fijos existe un valor no trivial del ángulo de rotación del operador de la moneda que anula el valor esperado de la posición para todo tiempo. Este ángulo, denominado «crítico», delimita los intervalos de valores del ángulo de rotación donde una estrategia se clasifica como ganadora o perdedora. Identificamos las condiciones geométricas que debe presentar la estrategia para que aparezca dicho ángulo de rotación crítico y dedujimos una expresión analítica para calcularlo.

Empleando el método de clasificación anterior, establecimos las condiciones bajo las cuales dos estrategias individualmente perdedoras producen un resultado ganador al combinarse, dando lugar así a la emergencia de la paradoja de Parrondo. Lo anterior condujo a la identificación de las desigualdades que definen las distintas fases del sistema, las cuales fueron representadas mediante diagramas de fase. Estos diagramas

condensan toda la información necesaria para el estudio de la paradoja, pues permiten visualizar las regiones en las que se manifiesta.

En conjunto, los resultados de esta investigación proporcionan una caracterización de la emergencia de la paradoja de Parrondo en DQWL con monedas homogéneas para los casos estudiados, estableciendo los criterios analíticos y geométricos que deben cumplir las estrategias. Estos hallazgos abren la puerta a extender el estudio a configuraciones más generales, como caminatas con estados iniciales arbitrarios para la moneda y combinaciones de operadores de moneda con distintos ejes de rotación.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] ABBOTT, DEREK: «Developments in Parrondo's paradox». En: *Applications of Nonlinear Dynamics: Model and Design of Complex Systems*, pp. 307–321. Springer, Berlin, Heidelberg, 2009. doi: 10.1007/978-3-540-85632-0_28.
- [2] BULGER, DAVID; FRECKLETON, JAMES y TWAMLEY, JASON: «Position-dependent and cooperative quantum Parrondo walks». *New Journal of Physics*, 2008, **10(9)**, p. 093014. doi: 10.1088/1367-2630/10/9/093014.
- [3] CHAKRABORTY, SAGNIK; DAS, ARPAN; MALLICK, ARINDAM y CHANDRASHEKAR, C. M.: «Quantum ratchet in disordered quantum walk». *Annalen der Physik*, 2017, **529(8)**, p. 1600346. doi: 10.1002/andp.201600346.
- [4] CHANDRA, N. y GHOSH, R.: *Quantum Entanglement in Electron Optics: Generation, Characterization, and Applications*. volumen 67 de *Springer Series on Atomic, Optical, and Plasma Physics*. Springer, Berlin, Heidelberg, 1st^a edición, 2013. ISBN 978-3-642-24069-0. doi: 10.1007/978-3-642-24070-6.
- [5] CHANDRASHEKAR, C. M. y BANERJEE, SUBHASHISH: «Parrondo's game using a discrete-time quantum walk». *Physics Letters A*, 2011, **375(14)**, pp. 1553–1558. doi: 10.1016/j.physleta.2011.02.043.
- [6] CHEONG, KANG HAO; WEN, TAO y LAI, JOEL WEIJIA: «Relieving cost of epidemic by Parrondo's paradox: a COVID-19 case study». *Advanced Science*, 2020, **7(24)**, p. 2002324. doi: 10.1002/advs.202002324.
- [7] CHILDS, ANDREW M.; CLEVE, RICHARD; DEOTTO, ENRICO; FARHI, EDWARD; GUTMANN, SAM y SPIELMAN, DANIEL A.: «Exponential algorithmic speedup by a quantum walk». En: *Proceedings of the Thirty-Fifth Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, STOC '03, pp. 59–68. Association for Computing Machinery, New York, NY, USA, 2003. doi: 10.1145/780542.780552.

- [8] DINIS, LUIS: «Optimal sequence for Parrondo games». *Physical Review E*, 2008, **77(2)**, p. 021124. doi: 10.1103/PhysRevE.77.021124.
- [9] EJLALI, NASIM; PEZESHK, HAMID; CHAUBEY, YOGENDRA P.; SADEGHI, MEHDI; EBRAHIMI, ALI y NOWZARI-DALINI, ABBAS: «Parrondo's paradox for games with three players and its potential application in combination therapy for type II diabetes». *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 2020, **556**, p. 124707. doi: 10.1016/j.physa.2020.124707.
- [10] ETHIER, S. N. y LEE, JIYEON: «The flashing Brownian ratchet and Parrondo's paradox». <https://arxiv.org/abs/1710.05295>, 2017.
- [11] FLITNEY, ADRIAN P.: «Quantum Parrondo's games using quantum walks». *arXiv preprint arXiv:1209.2252*, 2012.
- [12] FLITNEY, ADRIAN P.; ABBOTT, DEREK y JOHNSON, NEIL F.: «Quantum walks with history dependence». *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 2004, **37(30)**, pp. 7581–7591. doi: 10.1088/0305-4470/37/30/011.
- [13] GAWRON, PIOTR y MISZCZAK, JAROSŁAW A.: «Quantum implementation of Parrondo's paradox». *Fluctuation and Noise Letters*, 2005, **5(4)**, pp. L471–L478. doi: 10.1142/S0219477505002998.
- [14] GONG, MING; WANG, SHIYU; ZHA, CHEN; CHEN, MING-CHENG; HUANG, HE-LIANG; WU, YULIN; ZHU, QINGLING; ZHAO, YOUWEI; LI, SHAOWEI; GUO, SHAOJUN y otros: «Quantum walks on a programmable two-dimensional 62-qubit superconducting processor». *Science*, 2021, **372(6545)**, pp. 948–952. doi: 10.1126/science.abg7812.
- [15] HANTZKO, LUKAS y BINKOWSKI, LENNART: «Classification of coined quantum walks on the line and comparison to correlated classical random walks». *The European Physical Journal D*, 2026, **80(7)**, p. 112. doi: 10.1140/epjd/s10053-026-01217-9.
- [16] HARMER, GREGORY P. y ABBOTT, DEREK: «Losing strategies can win by Parrondo's paradox». *Nature*, 1999, **402(6764)**, p. 864. doi: 10.1038/47012.
- [17] —: «A review of Parrondo's paradox». *Fluctuation and Noise Letters*, 2002, **2(2)**, pp. R71–R107. doi: 10.1142/S0219477502000839.

- [18] HARMER, GREGORY P.; ABBOTT, DEREK; TAYLOR, PETER G. y PARRONDO, JUAN M. R.: «Parrondo's paradoxical games and the discrete Brownian ratchet». En: *AIP Conference Proceedings*, volumen 511, pp. 189–200. American Institute of Physics, 2000. doi: 10.1063/1.1303108.
- [19] KEMPE, JULIA: «Quantum random walks: an introductory overview». *Contemporary Physics*, 2003, **44**(4), pp. 307–327. doi: 10.1080/0010751031000110778.
- [20] KONNO, NORIO: «A new type of limit theorems for the one-dimensional quantum random walk». *Journal of the Mathematical Society of Japan*, 2005, **57**(4), pp. 1179–1195. doi: 10.2969/jmsj/1150287309.
- [21] KOŠÍK, JOZEF; MISZCZAK, JAROSŁAW A. y BUŽEK, VLADIMÍR: «Quantum Parrondo's game with random strategies». *Journal of Modern Optics*, 2007, **54**(13–15), pp. 2275–2287. doi: 10.1080/09500340701449013.
- [22] LAI, JOEL WEIJIA y CHEONG, KANG HAO: «Parrondo effect in quantum coin-toss simulations». *Physical Review E*, 2020, **101**(5), p. 052212. doi: 10.1103/PhysRevE.101.052212.
- [23] —: «Evaluation of single-prioritization voting systems in controlled collective Parrondo's games». *Nonlinear Dynamics*, 2022, **107**(3), pp. 2965–2974. doi: 10.1007/s11071-021-07133-8.
- [24] —: «Risk-taking in social Parrondo's games can lead to Simpson's paradox». *Chaos, Solitons & Fractals*, 2022, **158**, p. 111911. doi: 10.1016/j.chaos.2022.111911.
- [25] LAI, JOEL WEIJIA; TAN, JEAN REN ADRIEL; LU, HUIYI; YAP, ZI ROU y CHEONG, KANG HAO: «Parrondo paradoxical walk using four-sided quantum coins». *Physical Review E*, 2020, **102**(1), p. 012213. doi: 10.1103/PhysRevE.102.012213.
- [26] LI, MIN; ZHANG, YONG-SHENG y GUO, GUANG-CAN: «Quantum Parrondo's games constructed by quantum random walks». *Fluctuation and Noise Letters*, 2013, **12**(4), p. 1350024. doi: 10.1142/S021947751350024X.
- [27] MA, HO FAI; CHEUNG, KA WAI; LUI, GA CHING; WU, DEGANG y SZE-TO, KWOK YIP: «Effect of information exchange in a social network on investment». *Computational Economics*, 2019, **54**(4), pp. 1491–1503. doi: 10.1007/s10614-018-9869-z.

- [28] MACHIDA, TAKUYA y GRÜNBAUM, F. ALBERTO: «Some limit laws for quantum walks with applications to a version of the Parrondo paradox». *Quantum Information Processing*, 2018, **17**(4), p. 95. doi: 10.1007/s11128-018-1854-1.
- [29] MEYER, DAVID A.: «Noisy quantum Parrondo games». En: *Fluctuations and Noise in Photonics and Quantum Optics*, volumen 5111, pp. 344–350. SPIE, 2003. doi: 10.1117/12.497092.
- [30] MEYER, DAVID A. y BLUMER, HEATHER: «Parrondo games as lattice gas automata». *Journal of Statistical Physics*, 2002, **107**(1–2), pp. 225–239. doi: 10.1023/A:1014561026021.
- [31] —: «Quantum Parrondo games: biased and unbiased». *Fluctuation and Noise Letters*, 2002, **2**(4), pp. L257–L262. doi: 10.1142/S0219477502000980.
- [32] MITTAL, VIKASH y HUANG, YI-PING: «Parrondo’s paradox in quantum walks with inhomogeneous coins». *Physical Review A*, 2024, **110**(5), p. 052440. doi: 10.1103/PhysRevA.110.052440.
- [33] MOLINERO, XAVIER y MÉGNIEN, CAMILLE: «Markov chains applied to Parrondo’s paradox: the coin tossing problem». *arXiv preprint arXiv:2304.05876*, 2023.
- [34] NEVES, LEONARDO y PUENTES, GRACIANA: «Photonic discrete-time quantum walks and applications». *Entropy*, 2018, **20**(9), p. 731. doi: 10.3390/e20090731.
- [35] NIELSEN, MICHAEL A. y CHUANG, ISAAC L.: *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge University Press, Cambridge, 10th anniversary^a edición, 2010. ISBN 978-1-107-00217-3. doi: 10.1017/CBO9780511976667.
- [36] PARRONDO, JUAN M. R.; HARMER, GREGORY P. y ABBOTT, DEREK: «New paradoxical games based on Brownian ratchets». *Physical Review Letters*, 2000, **85**(24), pp. 5226–5229. doi: 10.1103/PhysRevLett.85.5226.
- [37] PAWELA, ŁUKASZ: «Parrondo paradox in quantum image encryption». *arXiv preprint arXiv:2508.16382*, 2025.
- [38] PIRES, MARCELO A. y QUEIRÓS, SILVIO M. DUARTE: «Parrondo’s paradox in quantum walks with time-dependent coin operators». *Physical Review E*, 2020, **102**(4), p. 042124. doi: 10.1103/PhysRevE.102.042124.

- [39] RAJENDRAN, JISHNU y BENJAMIN, COLIN: «Implementing Parrondo’s paradox with two-coin quantum walks». *Royal Society Open Science*, 2018, **5(2)**, p. 171599. doi: 10.1098/rsos.171599.
- [40] —: «Playing a true Parrondo’s game with a three-state coin on a quantum walk». *EPL (Europhysics Letters)*, 2018, **122(4)**, p. 40004. doi: 10.1209/0295-5075/122/40004.
- [41] RATH, ADITI; PANDA, DINESH KUMAR y BENJAMIN, COLIN: «Controlling quantum chaos via Parrondo strategies on NISQ hardware». *arXiv preprint arXiv:2506.00000*, 2025.
- [42] RINCÓN, LUIS: *Introducción a los procesos estocásticos*. UNAM, Facultad de Ciencias, México, 2012. ISBN 978-607-02-3832-1.
- [43] SHAKEEL, ASIF; MEYER, DAVID A. y LOVE, PETER J.: «History dependent quantum random walks as quantum lattice gas automata». *Journal of Mathematical Physics*, 2014, **55(12)**, p. 122203. doi: 10.1063/1.4903982.
- [44] SPITZER, FRANK: *Principles of Random Walk*. volumen 34 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, 2nd^a edición, 2001. ISBN 978-0-387-95154-6. doi: 10.1007/978-1-4757-4229-9.
- [45] SPURGIN, RICHARD y TAMARKIN, MAURRY: «Switching investments can be a bad idea when Parrondo’s paradox applies». *Journal of Behavioral Finance*, 2005, **6(1)**, pp. 15–18. doi: 10.1080/15427560.2005.9653428.
- [46] TAN, ZHI-XUAN y CHEONG, KANG HAO: «Periodic habitat destruction and migration can paradoxically enable sustainable territorial expansion». *Nonlinear Dynamics*, 2019, **98(1)**, pp. 1–13. doi: 10.1007/s11071-019-05168-3.
- [47] TREGENNA, BEN; FLANAGAN, WILL; MAILE, RIK y KENDON, VIV: «Controlling discrete quantum walks: coins and initial states». *New Journal of Physics*, 2003, **5(1)**, p. 83. doi: 10.1088/1367-2630/5/1/383.
- [48] VENEGAS-ANDRACA, SALVADOR ELÍAS: «Quantum walks: a comprehensive review». *Quantum Information Processing*, 2012, **11(5)**, pp. 1015–1106. doi: 10.1007/s11128-012-0432-5.
- [49] WALCZAK, ZBIGNIEW y BAUER, JAROSŁAW H.: «Noise-induced Parrondo’s paradox in discrete-time quantum walks». *Physical Review E*, 2023, **108(4)**, p. 044212. doi: 10.1103/PhysRevE.108.044212.

- [50] WEN, TAO; CHEONG, KANG HAO; LAI, JOEL WEIJIA; KOH, JIN MING y KOONIN, EUGENE V.: «Extending the lifespan of multicellular organisms via periodic and stochastic intercellular competition». *Physical Review Letters*, 2022, **128(21)**, p. 218101. doi: 10.1103/PhysRevLett.128.218101.
- [51] WEN, TAO; KOONIN, EUGENE V. y CHEONG, KANG HAO: «An alternating active-dormitive strategy enables disadvantaged prey to outcompete the perennially active prey through Parrondo's paradox». *BMC Biology*, 2021, **19(1)**, p. 118. doi: 10.1186/s12915-021-01053-y.
- [52] YE, YE; HANG, XIAO-RONG; KOH, JIN MING; MISZCZAK, JAROSŁAW ADAM; CHEONG, KANG HAO y XIE, NENG-GANG: «Ratcheting based on neighboring niches determines lifestyle». *Nonlinear Dynamics*, 2019, **98(3)**, pp. 1821–1830. doi: 10.1007/s11071-019-05289-5.
- [53] YE, YE; ZHANG, XIN-SHI; LIU, LIN y XIE, NENG-GANG: «Effects of group interactions on the network Parrondo's games». *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 2021, **583**, p. 126271. doi: 10.1016/j.physa.2021.126271.
- [54] ZÄHRINGER, F.; KIRCHMAIR, G.; GERRITSMA, R.; SOLANO, E.; BLATT, R. y ROOS, C. F.: «Realization of a quantum walk with one and two trapped ions». *Physical Review Letters*, 2010, **104(10)**, p. 100503. doi: 10.1103/PhysRevLett.104.100503.

A. Ángulo de rotación crítico

En esta sección calculamos el ángulo de rotación crítico para una configuración $\{|c_0(\beta = \pi/2, \gamma)\rangle, \hat{n}(\alpha, \phi)\}$ dada, el cual corresponde al único valor no trivial (no nulo) que anula el valor esperado de la posición para todo tiempo t . Tal como demostró Konno [20], el valor esperado de la posición de una DTQW unidimensional se anula para todo t si y solo si su distribución de probabilidad permanece simétrica para todo t . Apoyándonos en esta equivalencia, emplearemos el siguiente teorema.

Teorema A.1. *Una DTQW unidimensional descrita por un operador de moneda bidimensional C y un estado inicial de la moneda $|c_0\rangle = \cos(\beta/2)|0\rangle + e^{i\gamma}\sin(\beta/2)|1\rangle$ tiene una distribución de probabilidad simétrica para todo tiempo t [es decir, $P(x, t) = P(-x, t)$ para todo $x \in \mathbb{Z}$ y todo $t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$] si y solo si:*

1. $\beta = \pi/2$, y
2. $\text{Re}\left[C_{00}^* C_{01} e^{i\gamma}\right] = 0$.

El Teorema A.1 es una versión ligeramente modificada y generalizada del teorema presentado por Hantzko et al. en la ref. [15], el cual fue inicialmente formulado y demostrado por Konno en la ref. [20]. El enunciado original asume que C_{00} y C_{01} son distintos de cero. Por lo tanto, para extenderlo a operadores de moneda arbitrarios, basta con considerar los dos casos excluidos: operadores de moneda diagonales y antidiagonales.

Demostración. Cuando C_{00} y C_{01} son distintos de cero, el resultado se deduce directamente de la Ref. [20]. Si el operador de moneda es diagonal, $C_{01} = 0$, la segunda condición se satisface de forma trivial. La evolución produce una división balística, $|\psi_t\rangle = \cos(\beta/2)C_{00}^t|t, 0\rangle + e^{i\gamma}\sin(\beta/2)(C_{00}^*)^t|-t, 1\rangle$, por lo que las probabilidades en $x = t$ y $x = -t$ son $|\cos(\beta/2)|^2$ y $|\sin(\beta/2)|^2$, respectivamente. Por consiguiente, la distribución es simétrica para todo t si y solo si $\beta = \pi/2$.

Si el operador de moneda es antidiagonal, $C_{00} = 0$, la segunda condición vuelve a satisfacerse de forma trivial. En tiempos pares, el caminante está localizado en el

origen, $|\psi_t\rangle = (-1)^{t/2} [\cos(\beta/2)|0,0\rangle + e^{i\gamma} \sin(\beta/2)|0,1\rangle]$, de modo que la distribución es simétrica para cualquier estado inicial de la moneda. En tiempos impares, $|\psi_t\rangle = (-1)^{(t-1)/2} [e^{i\gamma} \sin(\beta/2)C_{01}|1,0\rangle - \cos(\beta/2)C_{01}^*|-1,1\rangle]$, por lo que el caminante se divide entre $x = 1$ y $x = -1$ con probabilidades $|\sin(\beta/2)|^2$ y $|\cos(\beta/2)|^2$, respectivamente. Por lo tanto, la distribución es simétrica para todo t si y solo si $\beta = \pi/2$. Esto demuestra que el teorema también es válido para operadores de moneda diagonales y antidiagonales. $\square$

Aplicamos ahora el teorema A.1 al operador de moneda $C = e^{-i\frac{\theta}{2}\hat{n}(\alpha,\phi)\cdot\vec{\sigma}}$, con un eje de rotación fijo $\hat{n}(\alpha,\phi)$. Para ello emplearemos la representación matricial de un elemento general de $SU(2)$:

$$C(\theta, \alpha, \phi) = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \mathbb{1} - i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) (\hat{n} \cdot \vec{\sigma}), \quad (\text{A.1a})$$

$$= \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \mathbb{1} - i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha e^{-i\phi} \\ \sin \alpha e^{i\phi} & -\cos \alpha \end{bmatrix}, \quad (\text{A.1b})$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\frac{\theta}{2}) - i \cos \alpha \sin(\frac{\theta}{2}) & -i e^{-i\phi} \sin \alpha \sin(\frac{\theta}{2}) \\ -i e^{i\phi} \sin \alpha \sin(\frac{\theta}{2}) & \cos(\frac{\theta}{2}) + i \cos \alpha \sin(\frac{\theta}{2}) \end{bmatrix}. \quad (\text{A.1c})$$

Definiendo las variables

$$C_{00} := \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - i \cos \alpha \sin\left(\frac{\theta}{2}\right), \quad C_{01} := -i e^{-i\phi} \sin \alpha \sin\left(\frac{\theta}{2}\right); \quad (\text{A.2})$$

podemos expresar $C(\theta, \alpha, \phi)$ como

$$C(\theta, \alpha, \phi) = \begin{bmatrix} C_{00} & C_{01} \\ -C_{01}^* & C_{00}^* \end{bmatrix}. \quad (\text{A.3})$$

La condición (1) del Teorema A.1 exige que el estado inicial de la moneda se ubique en el ecuador de la esfera de Bloch, $\beta = \pi/2$. Por otro lado, al sustituir los elementos de matriz dados en la ec. (A.2), la condición (2) conduce a:

$$0 = \sin \alpha \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[\sin(\gamma - \phi) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \cos(\gamma - \phi) \cos \alpha \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right]. \quad (\text{A.4})$$

Buscaremos ahora los valores de θ que satisfacen la ecuación anterior. Para ello, analizaremos las soluciones que se obtienen cuando igualamos a cero cada factor del lado derecho de la ecuación.

1. Anulación del primer factor

Cuando $\sin \alpha = 0$, la expresión en la ec. (A.4) se anula independientemente del valor de θ . Para satisfacer esta condición, debe cumplirse que

$$\alpha = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}; \quad (\text{A.5})$$

Por lo tanto, cuando el eje de rotación de la estrategia se ubica en el eje z de la esfera de Bloch, cualquier $\theta \in [0, 2\pi)$ constituye una solución.

2. Anulación del segundo factor

Cuando $\sin(\theta/2) = 0$, la expresión de la ec. (A.4) se anula para cualquier elección de $\{\alpha, \phi, \gamma\}$. Esta condición se satisface si

$$\frac{\theta}{2} = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \implies \theta = 2\pi k. \quad (\text{A.6})$$

Por lo tanto, $\theta = 2\pi k$ es solución general del problema para cualquier eje de rotación y cualquier estado inicial de la moneda cuyo vector de Bloch se ubica en el plano xy .

3. Anulación del tercer factor

La ecuación

$$\sin(\gamma - \phi) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \cos(\gamma - \phi) \cos \alpha \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = 0 \quad (\text{A.7})$$

define las soluciones no triviales del sistema, donde la anulación del valor esperado de la posición depende de una relación específica entre la geometría de la rotación y del estado inicial de la moneda. A diferencia de los casos anteriores, aquí el valor esperado se anula por una interferencia destructiva entre las probabilidades del caminante de desplazarse hacia la izquierda o hacia la derecha. Para analizar este caso, distinguimos dos posibilidades: $\cos(\gamma - \phi) \cos \alpha = 0$ y $\cos(\gamma - \phi) \cos \alpha \neq 0$.

3.1 $\cos(\gamma - \phi) \cos \alpha = 0$

Este producto se anula cuando por lo menos uno de sus factores es igual a cero.

3.1.1 $\cos(\gamma - \phi) = 0$

Esto ocurre cuando la diferencia entre los ángulos azimutales del vector de Bloch del estado inicial de la moneda y del eje de rotación está dada por

$$\gamma - \phi = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (\text{A.8})$$

Esto es análogo a que la proyección del eje de rotación en el plano xy de la esfera de Bloch sea ortogonal al vector del estado inicial de la moneda. Sustituyendo esta condición, la ec. (A.7) se reduce a

$$\sin(\gamma - \phi) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = 0. \quad (\text{A.9})$$

Como $\cos(\gamma - \phi) = 0$, entonces $\sin(\gamma - \phi) \neq 0$. Por ello, para satisfacer la ec. (A.9) debe cumplirse

$$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = 0, \quad (\text{A.10})$$

lo que conduce a la solución

$$\frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi \implies \theta = \pi + 2\pi k. \quad (\text{A.11})$$

3.1.2 $\cos \alpha = 0$

Esto ocurre cuando

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}; \quad (\text{A.12})$$

es decir, cuando el eje de rotación se ubica en el plano xy de la esfera de Bloch. Bajo esta condición, la ecuación se reduce nuevamente a

$$\sin(\gamma - \phi) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = 0. \quad (\text{A.13})$$

Distinguimos dos posibilidades:

3.1.2.1 $\sin(\gamma - \phi) = 0$

Entonces

$$\gamma - \phi = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}; \quad (\text{A.14})$$

por lo que el eje de rotación y el vector de Bloch del estado inicial de la moneda se hallan ambos en el plano xy y además son paralelos

o antiparalelos. En este caso, la ec. (A.7) se anula idénticamente, por lo que todo $\theta \in [0, 2\pi)$ es solución.

3.1.2.2 $\sin(\gamma - \phi) \neq 0$

En este escenario el eje de rotación y el vector de Bloch del estado inicial de la moneda se hallan ambos en el plano xy , pero no son paralelos ni antiparalelos. Para que la expresión de la ec. (A.13) se anule debe cumplirse

$$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = 0 \implies \theta = \pi + 2\pi k.$$

3.2 $\cos(\gamma - \phi) \cos \alpha \neq 0$

Obtenemos este caso cuando tanto $\cos(\gamma - \phi)$ como $\cos \alpha$ son distintos de cero. Estas condiciones implican que el eje de rotación se encuentra fuera del plano xy y que, además, su proyección sobre dicho plano no es ortogonal al vector de Bloch del estado inicial de la moneda.

Supongamos que $\cos(\theta/2) = 0$. Bajo esta condición, $\sin(\theta/2) = \pm 1$, de modo que la ec. (A.7) se reduce a $\cos(\gamma - \phi) \cos \alpha = 0$, lo cual contradice la condición de este subcaso. Por lo tanto, necesariamente debe cumplirse que $\cos(\theta/2) \neq 0$. Debido a lo anterior, podemos dividir la ec. (A.7) entre $\cos(\theta/2)$ y obtener

$$\sin(\gamma - \phi) + \cos(\gamma - \phi) \cos \alpha \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = 0. \quad (\text{A.15})$$

Reordenando,

$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = -\frac{\sin(\gamma - \phi)}{\cos(\gamma - \phi) \cos \alpha} = -\frac{\tan(\gamma - \phi)}{\cos \alpha}, \quad (\text{A.16})$$

lo cual es válido bajo la condición $\cos(\gamma - \phi) \cos \alpha \neq 0$. Finalmente, al resolver para θ obtenemos

$$\theta = 2 \arctan\left[-\frac{\tan(\gamma - \phi)}{\cos \alpha}\right] + 2\pi k, \quad (\text{A.17})$$

con $k \in \mathbb{Z}$. Cabe resaltar que cuando la proyección del eje de rotación sobre el plano xy es paralela o antiparalela al vector de Bloch del estado inicial de la moneda [*i. e.*, $\sin(\gamma - \phi) = 0$], la ec. (A.17) se reduce nuevamente al valor trivial $\theta = 0$.

De las deducciones anteriores concluimos que, para garantizar una única solución no nula de la ec. (A.4), deben cumplirse dos condiciones: (1) el eje de rotación del operador de moneda no debe alinearse con el eje z ($\sin \alpha \neq 0$), y (2) su proyección sobre el plano xy no debe ser paralela ni antiparalela al vector de Bloch del estado inicial de la moneda [$\sin(\gamma - \phi) \neq 0$]. Bajo estas restricciones, el ángulo de rotación crítico está dado por:

$$\theta_c = \begin{cases} \pi & \text{si } \cos \alpha = 0 \text{ o } \cos(\gamma - \phi) = 0, \\ 2 \arctan \left[-\frac{\tan(\gamma - \phi)}{\cos \alpha} \right] \text{ mód } 2\pi & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (\text{A.18})$$

Dicho ángulo de rotación se denomina «crítico» porque delimita la transición entre estrategias ganadoras y perdedoras, como se ilustra en los resultados numéricos de la fig. A.1.

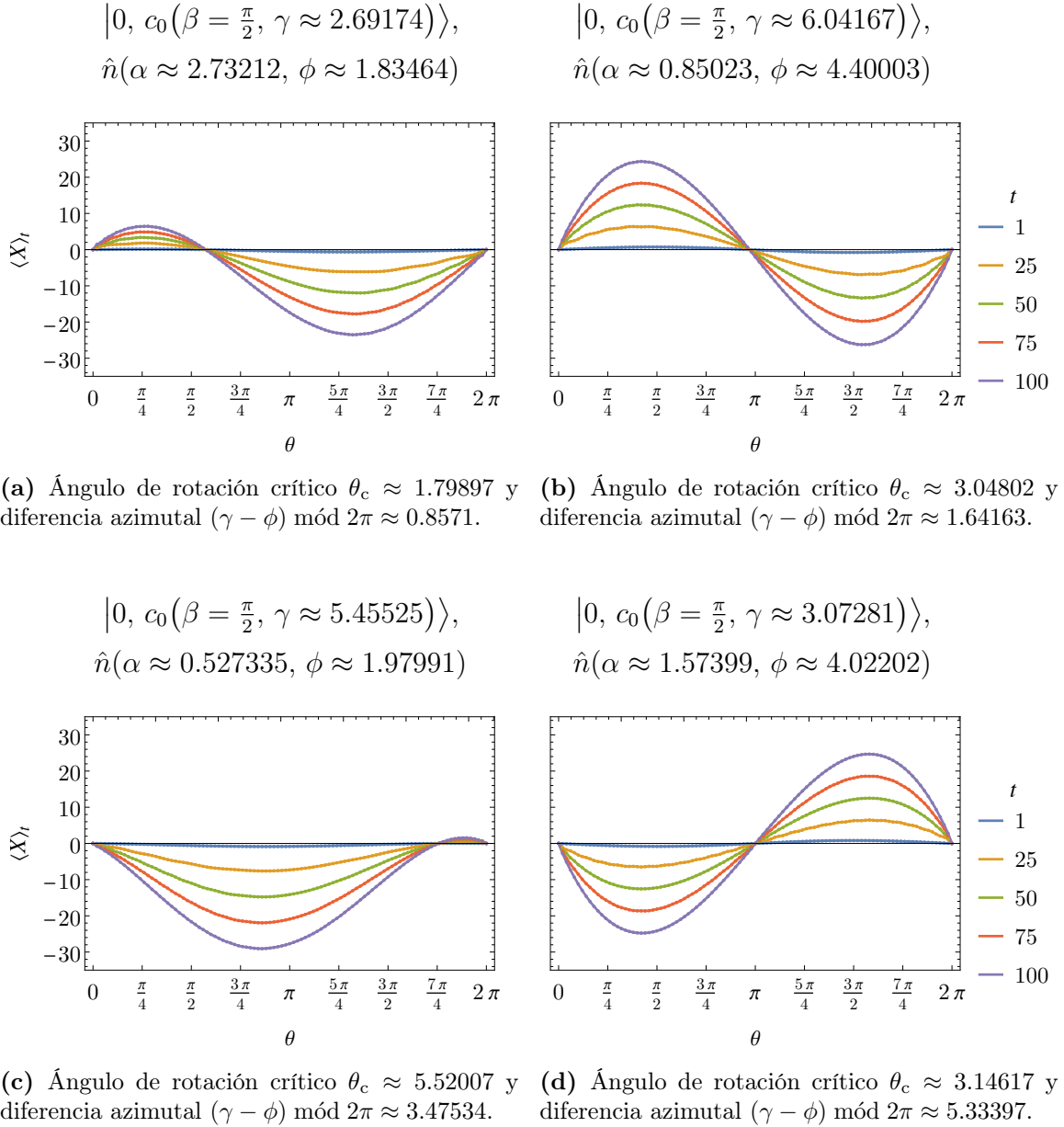


Figura A.1. Valor esperado de la posición en función del ángulo de rotación para cuatro estrategias con eje de rotación y estado inicial de la moneda seleccionados de manera aleatoria y uniforme sobre la esfera de Bloch, para los tiempos $t = 1, 25, 50, 75, 100$. En los paneles (a) y (b), la diferencia azimutal satisface $(\gamma - \phi) \bmod 2\pi \in (0, \pi)$; en consecuencia, los valores $\theta \in (0, \theta_c)$ generan estrategias ganadoras, mientras que $\theta \in (\theta_c, 2\pi)$ conducen a estrategias perdedoras. Este comportamiento se invierte en los paneles (c) y (d), donde $(\gamma - \phi) \bmod 2\pi \in (\pi, 2\pi)$.

B. Proyección social

El Ejercicio Profesional Supervisado (EPS) integra tres ejes estratégicos para la generación, transmisión y socialización del conocimiento: la investigación, la docencia y la extensión. En este capítulo se describen las actividades realizadas correspondientes a los ejes de docencia y extensión, los cuales constituyen el componente de proyección social del EPS que complementa la investigación científica realizada.

B.1. Docencia

Como parte del eje de docencia enfocado en la transferencia de conocimientos y la formación académica, se diseñó e impartió el taller titulado «De ecuaciones a código: introducción a Wolfram Language y Mathematica», desarrollado en colaboración con Amado Alberto Cabrera Estrada, estudiante de la Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas. Esta actividad tuvo como objetivo introducir a los participantes en el uso del lenguaje de programación Wolfram Language y del software Mathematica y contribuir a su formación académica mediante el fortalecimiento de competencias en el uso de herramientas de programación simbólica y numérica, útiles en la investigación contemporánea.

B.1.1. Descripción general del taller

El taller se llevó a cabo en modalidad virtual a través de la plataforma Google Meet, durante la semana del 4 al 8 de agosto de 2025, con una duración de una hora diaria. Con el fin de garantizar el acceso a Mathematica, se gestionaron licencias gratuitas para los participantes, facilitadas a través de la Academia de Ciencias Médicas, Físicas y Naturales de Guatemala. Asimismo, se puso a disposición de los participantes un repositorio público en GitHub (<https://github.com/AmadoCab/MathematicaCourse>) con todo el material del curso, incluyendo los *notebooks* y otros recursos. De igual manera, se utilizó una página en Notion para organizar contenidos, proporcionar material adicional y compartir información relevante del taller.

El curso fue estructurado como una serie de sesiones teórico-prácticas, en las que se priorizó el aprendizaje mediante la resolución de problemas. Como material didáctico principal se utilizaron *notebooks* interactivos desarrollados específicamente para el curso, los cuales incluían tanto explicaciones conceptuales como ejemplos aplicados. Este enfoque tuvo como propósito ayudar a los estudiantes a familiarizarse con la sintaxis del lenguaje y, por medio de la resolución de problemas durante el curso, desarrollar intuición para la resolución de problemas básicos de física y matemática empleando estas herramientas computacionales.

El contenido del taller se organizó de manera progresiva, iniciando con una introducción al entorno de trabajo de Mathematica y los elementos básicos de Wolfram Language, seguido por el estudio de estructuras de datos y bucles. Posteriormente, se abordó la definición de funciones, enfatizando el paradigma funcional característico de Wolfram Language. En las últimas sesiones se exploraron aplicaciones en matemáticas simbólicas y numéricas, así como herramientas de visualización de datos en dos y tres dimensiones, permitiendo a los estudiantes interpretar de manera más efectiva los resultados obtenidos.

Es importante destacar que, debido a la naturaleza intensiva del taller, se optó por no realizar evaluaciones. La prioridad pedagógica fue proporcionar a los asistentes las nociones básicas del lenguaje y del entorno que les permitiera continuar explorándolos de manera autodidacta, para lo cual se brindó material adicional.

B.1.2. Recibimiento del taller

El taller tuvo buena recepción, contando con 73 participantes inscritos, siendo estos principalmente estudiantes de la Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad de San Carlos de Guatemala, así como de otras facultades e incluso de distintas universidades. En la tabla B.1 se detalla la distribución de los participantes inscritos según su unidad académica de procedencia.

Unidad académica	Cantidad	Porcentaje
Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas	43	59 %
Facultad de Ciencias Químicas y Farmacia	17	23 %
Facultad de Humanidades	7	10 %
Facultad de Ingeniería	4	6 %
Escuela de Formación de Profs. de Enseñanza Media	1	1 %
Facultad de Ciencias Económicas	1	1 %
Total	73	100 %

Tabla B.1. Distribución de participantes inscritos por unidad académica.

A pesar de que el taller no incluyó evaluaciones formales para medir de manera directa los conocimientos adquiridos, fue posible valorar el aprendizaje de los participantes a través de su participación activa durante las sesiones, manifestada en preguntas e intervenciones (ver fig. B.1). Asimismo, posterior a la finalización del curso, se atendieron consultas adicionales por medio de correo electrónico, lo cual evidenció interés por parte de los estudiantes en profundizar en los contenidos abordados. De manera complementaria, se recibieron comentarios positivos tanto durante como después del desarrollo del taller, en los que los participantes destacaron la utilidad de los conocimientos adquiridos y expresaron su motivación por continuar aprendiendo y aplicar estas herramientas en sus respectivas áreas.

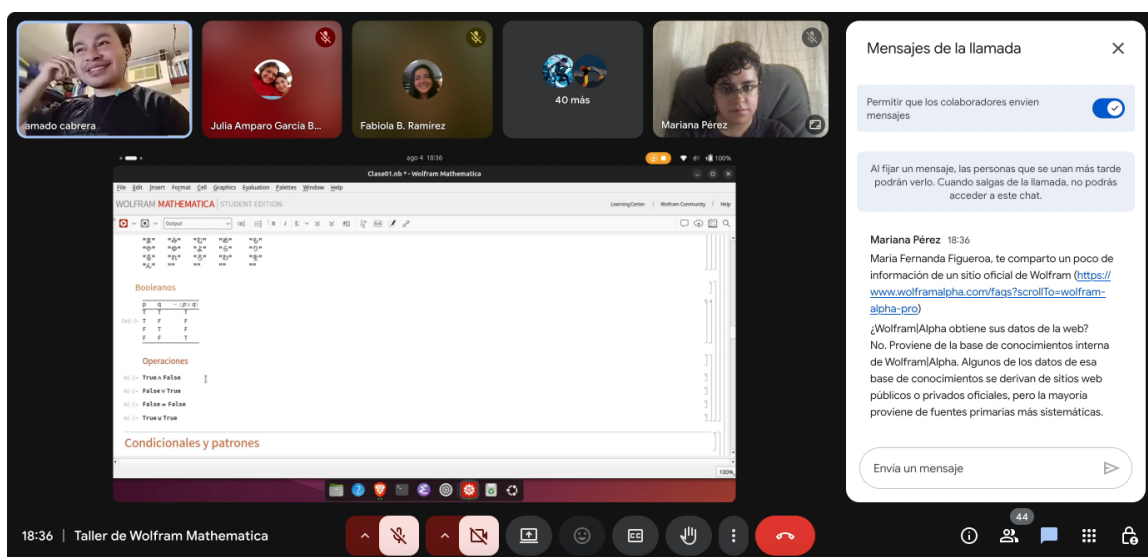


Figura B.1. Resolución de dudas durante el taller.

B.2. Extensión

El eje de extensión se concibe como el conjunto de actividades orientadas a proyectar el conocimiento científico a la sociedad, promoviendo su divulgación e incentivando a las futuras generaciones de profesionales a interesarse en la ciencia, lo cual es necesario para el desarrollo del país. Con este objetivo, se participó en la feria informativa InfoUSAC, organizada por la Universidad de San Carlos de Guatemala, la cual constituye uno de los principales espacios de interacción entre la universidad y estudiantes de nivel medio interesados en continuar sus estudios superiores. La participación en este evento tuvo como objetivo principal dar a conocer la oferta académica de la Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas (ECFM), así como fomentar

el interés por estudiar las licenciaturas en Física y Matemática.

B.2.1. Descripción de actividades realizadas

La edición 2025 de InfoUSAC se llevó a cabo del 25 al 28 de marzo, en un horario de 8:00 a 15:00 horas. La participación en este evento involucró actividades que abarcaron tanto la preparación previa como la interacción directa con los asistentes. Durante la fase preparatoria, se colaboró en la elaboración y selección de material didáctico y de divulgación científica, entre los que destacaron:

- **Juegos de razonamiento lógico-matemático:** recursos seleccionados para interactuar con los aspirantes y desafiar sus habilidades cognitivas, entre los que se incluyen:
 - Torres de Hanói: rompecabezas matemático que consiste en trasladar una pila de discos de una vara a otra siguiendo reglas de jerarquía de tamaño, ideal para estimular el pensamiento recursivo.
 - Cubos de Rubik: rompecabezas que requieren la aplicación de algoritmos y visión espacial para su solución.
 - *Senku*: juego de tablero solitario cuyo objetivo es eliminar piezas mediante saltos hasta que solo quede una en el centro, fomentando la planificación estratégica.
 - Variante de tangram para la demostración visual del teorema de Pitágoras: su resolución requiere habilidades espaciales que permiten al jugador rotar y trasladar figuras geométricas para encajarlas en un espacio determinado. Además, esta versión ilustra de manera práctica la equivalencia de áreas que fundamenta el teorema de Pitágoras.
 - El acertijo de la moneda más ligera: problema de lógica que utiliza una balanza de dos platillos para identificar, mediante el menor número de intentos, una moneda con peso distinto.
- **Póster sobre caminatas cuánticas:** material gráfico que sirvió como ejemplo representativo de una línea de investigación actual en la unidad académica.

Durante cada día del evento se apoyó en el montaje y desmontaje del *stand* informativo de la ECFM, el cual incluía mobiliario y equipo audiovisual, recursos informativos y el material didáctico y de divulgación mencionado anteriormente. Este puede apreciarse en la fig. B.2.

La actividad principal durante el desarrollo del evento consistió en la atención directa a los estudiantes de nivel medio. En este espacio se brindó información detallada sobre las carreras de Física y Matemática de la ECFM, abordando aspectos como los requisitos de ingreso, el plan de estudios, la duración de la carrera y las posibles áreas de desarrollo profesional. Para ello, se emplearon diversos recursos, incluyendo la presentación institucional realizada por el Lic. José Carlos Bonilla, para la cual se brindó retroalimentación previa al evento para complementar la información dirigida a aspirantes de la Licenciatura en Física Aplicada.

Además de proporcionar orientación académica a los interesados, se buscó generar un acercamiento más dinámico mediante la explicación de conceptos científicos de forma accesible y el uso del material didáctico y de divulgación previamente mencionado. Todo esto se complementó con la exhibición de herramientas experimentales tales como un telescopio para el avistamiento de objetos lejanos en el campus, un espectroscopio de bolsillo para la observación del espectro de luz natural y mirascopios 3D para la demostración de una ilusión óptica. Este enfoque permitió motivar a los estudiantes a considerar una formación en ciencias, contribuyendo así a la difusión de la cultura científica.

B.2.2. Resultados del evento

La participación en «InfoUSAC» evidenció el impacto positivo de este tipo de iniciativas, al facilitar un espacio de diálogo entre la universidad y la sociedad. En el evento se atendió a más de 300 aspirantes, de los cuales aproximadamente un tercio mostró un interés significativo en estudiar las carreras que ofrece la ECFM y se inscribieron para recibir información adicional. Esto, tal como indica el diploma entregado a los colaboradores del evento (fig. B.3), resalta la importancia de las actividades de extensión que promuevan el acceso al conocimiento y el interés en áreas fundamentales para el avance tecnológico y científico del país.



(a) Día 1.



(b) Día 2.



(c) Día 3.



(d) Día 4.

Figura B.2. Fotografías de los colaboradores en cada día del evento.



Figura B.3. Diploma de participación en InfoUSAC 2025 extendido por el director de la Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas.