



Universidad de San Carlos de Guatemala
Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Física

MEDICIONES IMPERFECTAS EN UNA CAMINATA CUÁNTICA DISCRETA EN EL TIEMPO EN UNA LÍNEA

Amado Alberto Cabrera Estrada

Asesorado por Dr. Carlos Francisco Pineda Zorrilla,
M.Sc. José Alfredo de León Garrido e
Ing. José Rodolfo Samayoa Dardón

Guatemala, septiembre de 2026

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA



ESCUELA DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS

**MEDICIONES IMPERFECTAS EN UNA CAMINATA
CUÁNTICA DISCRETA EN EL TIEMPO EN UNA
LÍNEA**

TRABAJO DE GRADUACIÓN
PRESENTADO A LA JEFATURA DEL
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
POR

AMADO ALBERTO CABRERA ESTRADA

ASESORADO POR DR. CARLOS FRANCISCO PINEDA ZORRILLA,
M.SC. JOSÉ ALFREDO DE LEÓN GARRIDO E
ING. JOSÉ RODOLFO SAMAYOA DARDÓN

AL CONFERÍRSELE EL TÍTULO DE
LICENCIADO EN FÍSICA APLICADA

GUATEMALA, SEPTIEMBRE DE 2026

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA
ESCUELA DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS



CONSEJO DIRECTIVO INTERINO

Director	M.Sc. Jorge Marcelo Ixquiac Cabrera
Representante Docente	Arq. Marco Antonio de León Vilaseca
Representante Docente	M.A. Pedro Peláez Reyes
Representante de Egresados	Lic. Urías Amitaí Guzmán García
Representante de Estudiantes	Sr. Willian Fernando Campos Tello
Representante de Estudiantes	Sr. Cristian Oswaldo Cabrera Melara
Secretario	Lic. Billy Othmaro Quevedo Carranza

TRIBUNAL QUE PRACTICÓ EL EXAMEN GENERAL PRIVADO

Director	M.Sc. Jorge Marcelo Ixquiac Cabrera
Examinador	Dr. José Rodrigo Sacahui Reyes
Examinador	Dr. Enrique Pazos Avalos
Examinador	M.Sc. Freddy Eduardo Rodríguez Quezada
Secretario	Lic. Billy Othmaro Quevedo Carranza

Ref. D.DTG. F009-2026
Guatemala, 07 de septiembre de 2026

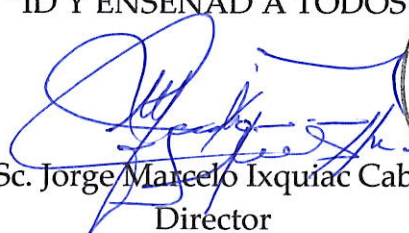
EL DIRECTOR DE LA ESCUELA DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS DE LA
UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

CONSIDERANDO:

Que el trabajo de graduación titulado: "**MEDICIONES IMPERFECTAS EN UNA CAMINATA CUÁNTICA DISCRETA EN EL TIEMPO EN UNA LÍNEA**", presentado por el estudiante universitario **Amado Alberto Cabrera Estrada**, ha sido revisado y aprobado por el Asesor y el Jefe de la Licenciatura en Física Aplicada, se autoriza la impresión del trabajo de graduación.

IMPRÍMASE.

"ID Y ENSEÑAD A TODOS"


M.Sc. Jorge Marcelo Ixquiac Cabrera
Director



AGRADECIMIENTOS

«Unde sumus quasi nanus aliquis humeris gigantis superpositus. Ille quidem aspicit longius gigante, non ex quantitate propria sed ex quantitate suppositi».

– Guillaume de Conches, *Glosæ super Priscianum*.

Al reflexionar sobre el proceso detrás de este trabajo de graduación, me resulta inevitable evocar las célebres palabras de Newton a Hooke: *“If I have seen further it is by standing on the shoulders of Giants”*¹. Ya en el siglo XII, Guillaume de Conches plasmaba la esencia de este aforismo², afirmando que podemos llegar más alto gracias a aquellos que cimentaron nuestro camino. Por ello, deseo dedicar estas líneas para agradecer a los «gigantes» cuyo apoyo y guía han sido fundamentales para «ver más lejos» y llegar al final de mi licenciatura.

En primer lugar, quiero agradecer a mis papás, Amado y Evelyn, quienes siempre me han apoyado para seguir mis sueños. Me han acompañado en cada etapa: ayudándome con las tareas en el colegio, buscando que mejorara mis notas y conversando conmigo hasta altas horas de la noche, extendiendo todos estos cuidados hasta una edad que casi me avergüenza admitir. Pero, principalmente, les agradezco por ser un ejemplo en todas las áreas de mi vida, guiándome siempre por el buen camino y retándome a mejorar cada día. A mis hermanos, Laura y Juan Rubén, quienes siempre han estado ahí para animarme cuando lo necesito: ya sea quejándonos entre nosotros, dándonos consejos, contándonos anécdotas de nuestro día, hablando de cualquier tema o viendo una película de vez en cuando.

A mis abuelos, Papi Carlos (q.e.p.d.) y Delia, quienes siempre me recibieron en su casa con cariño, llevándome al mercado a saludar a todas las señoras, dejándome ver juntos El Chavo del 8, evitándome regaños y cuidándome con mucho amor. A Papá Rubén y Mamá Estela, por recibirme con comida deliciosa, llevarme a jugar al Jute, ir juntos a la feria y, sobre todo, por consentirme cada vez que llego allá.

¹Traducción moderna

²Atribuido originalmente a su maestro Bernard de Chartres y documentado más tarde por John of Salisbury.

A mis tíos, Carlitos y Eli, Iván y Diudha, Coca y Nancy, Laurita, Mao y Mauricio, por sus consejos, cariño y apoyo. A mis primos, Hermana (Claudia María), Nene Iván, Sebastián, Marco, Han Yee, Ximena, Momoi, Andreita, Emiliano, Iván Enrique y Diudhanettía, quienes siempre han estado presentes para alegrarme el día, jugar unas partidas de Dragon Ball o aconsejarme.

A Mariana, que desde que nos conocimos en el primer año de la universidad ha estado apoyándome para alcanzar mis sueños, dándome ánimos cuando las cosas salen mal, motivándome a seguir superándome día con día y, en definitiva, por ser un pilar fundamental de apoyo mutuo en todas las áreas de la vida para ser mejores.

A mis asesores: a José Alfredo, por haberme dado la oportunidad de trabajar bajo tu tutoría, por enseñarme sobre el mundo académico y la información cuántica, y por apoyarme siempre que he necesitado ayuda; tu atención al detalle y didáctica me han enseñado mucho de lo que espero poner en práctica en mi futuro profesional. A Carlos Pineda, por interesarse en mi proyecto, aceptarme como miembro de su grupo de investigación y apoyarme en el desarrollo de este trabajo. La visita al IF me marcó muy profundamente y es una fuente de inspiración para seguir investigando y llegar a realizar un posgrado. A Rodolfo Samayoa, por apoyarme incondicionalmente en mis proyectos, por las horas de clase y por el libro de redes tensoriales que amenizó bastantes tardes de mi último año de universidad. Además agradecemos los apoyos de los proyectos UNAM-PAPIIT IG101324 y SECIHTI CBF-2025-I-1548.

A los «VIP», quienes han sido como una segunda familia y han tenido un gran impacto desde mi niñez. A Charly, Pepe, Chofo, Nacho y Tony, quienes siempre me han aconsejado o regañado cuando lo necesito; a Gaby, María Estela, Brenda y Mari, quienes siempre nos han cuidado y acompañado a cada partido o salida en familia. Y a Marquito, Dany, Carlitos, Gabri, Luisa, Chofito y Lucía, quienes son como primos para mí y con quienes más aventuras he compartido.

A mis amigos del colegio: Mario, Marcelo, Fabián, Alessandro, Sofy, Ana Lucía, Alida, Mari e Ale, con quienes pasé innumerables horas hablando en el colegio. Sin ustedes, esos años hubieran sido un martirio aún mayor, pero los pasamos riendo, sufriendo penas adolescentes, ayudándome a aplicarme en las tareas y, sobre todo, ayudándome a pasar de año. Gracias por su amistad incondicional, con la cual espero contar por muchos años más.

A mis amigos de la universidad: Majo, Obsdy, Sandra, Joshep y Alex. Gracias por toda la ayuda que siempre me brindaron para entender las clases, sacar demostraciones, comparar tareas y darme ánimos luego de los malos exámenes. Aunque los constantes cierres de la universidad acortaron nuestro tiempo juntos, no olvido los

momentos platicando entre clases mientras caminábamos entre el T7, el T3 y el T1.

A todos mis profesores, empezando por las hermanas y maestras del colegio, quienes por 12 años me tuvieron enorme paciencia y que me dedicaron tantas horas adicionales para que pudiera aprobar sus clases. La formación espiritual que las hermanas siempre priorizaron ha sido un pilar fundamental para guiarme por el mejor camino. A los catedráticos de la ECFM con quienes recibí clases, por estar siempre disponibles para ayudar al alumnado dentro y fuera del aula, y por su gran dedicación a la enseñanza. A Mapache, por sus ocurrencias y pláticas que siempre me hacen reír a la vez que me retan a pensar. A Juan Diego, Rodrigo y Laura, quienes no temen posicionarse, saben guiar con el ejemplo y cuyos consejos han sido fundamentales. A Freddy, Giovanni, Damián, Hugo, Héctor y Beatriz, cuyas enseñanzas han sido de gran ayuda en mi formación profesional.

Al personal administrativo de la escuela: Claudia, Norma, Paola, Vicky, Nancy, Francisco y al resto de trabajadores que mantienen el buen funcionamiento de la ECFM.

Y, finalmente, a todas las personas que han pasado por mi vida dejando pequeñas huellas que también han dado forma al camino que hoy recorro, el cual espero me siga llevando a alcanzar nuevos éxitos, tal como lo significa la culminación de mi licenciatura.

DEDICATORIA

Este trabajo quiero dedicarlo a Dios y todos los gigantes que me han ayudado a llegar tan lejos.

ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE DE FIGURAS	IX
LISTA DE SÍMBOLOS	XI
OBJETIVOS	XIII
INTRODUCCIÓN	XV
1. Preliminares	1
1.1. Caminatas aleatorias	1
1.1.1. Modelo matemático de una caminata aleatoria	1
1.1.2. Propiedades de las caminatas aleatorias	2
1.1.2.1. Distribución de probabilidad de la posición del caminante	2
1.1.2.2. Desviación estándar	3
1.2. Caminatas cuánticas	4
1.2.1. Modelo matemático de una DTQW	5
1.2.1.1. Espacios de Hilbert	5
1.2.1.2. Operadores de evolución de una DQWL	5
1.2.2. Ejemplo de DQWL	6
1.2.3. Propiedades de las DTQW	7
1.2.3.1. Distribución de probabilidad de la posición del caminante	7
1.2.3.2. Desviación estándar	8
1.3. Operador de densidad	8
1.3.1. Estados puros y mixtos	9
1.3.2. Caracterización del operador de densidad	12
1.3.3. Reformulación de los postulados	14
1.3.4. Matriz de densidad reducida	15
1.4. Canales cuánticos	16
1.4.1. Propiedades de los canales cuánticos	17

1.4.2. Representación de canales cuánticos	18
1.5. Decoherencia cuántica	19
2. Presentación del problema	21
2.1. Modelos de decoherencia en caminatas cuánticas	21
2.2. Motivación física del canal de <i>fuzzy shift</i>	22
2.2.1. Implementación experimental	22
2.2.2. Canal de decoherencia	24
3. Resultados	27
3.1. Clasicidad en canales de <i>phase flip</i> y proyecciones	27
3.2. Clasicidad en el canal <i>fuzzy shift</i>	29
3.2.1. Caminata decoherente como superposición de caminatas aleatorias	31
3.2.2. Verificación de clasicidad empleando la desviación estándar . . .	31
3.2.3. Coherencias en la matriz de densidad reducida de la posición . .	34
3.2.4. Evaluando cuanticidad mediante la pureza	38
3.3. Distintos estados iniciales de la moneda	38
CONCLUSIONES	43
BIBLIOGRAFÍA	45
A. Implementación numérica	49
A.1. Definición del entorno de simulación	49
A.2. Dinámica y evolución temporal	50
A.2.1. Redimensionamiento dinámico del espacio	50
A.2.2. Aplicación de operadores	50
A.3. Ejecución de la simulación	51
A.4. Análisis y reducción de datos	51
A.4.1. Matriz reducida y distribución de probabilidad	51
A.4.2. Momentos estadísticos y ajustes	51
A.4.3. Pureza de estado y norma l1 de coherencia	52
B. Trabajo social	53
B.1. Extensión	53
B.1.1. InfoUSAC	53
B.1.2. Elaboración de material	54
B.1.3. Preparación del stand	55

B.1.4. Evento	56
B.2. Docencia	56
B.2.1. Descripción general y objetivos	57
B.2.2. Metodología y contenido curricular	58
B.2.3. Recursos y plataformas de apoyo	60
B.2.4. Resultados del taller	61
B.2.4.1. Perfil de los participantes	61
B.2.4.2. Evaluación y retroalimentación	61

ÍNDICE DE FIGURAS

1.1.	Esquema de la dinámica de una caminata aleatoria en una dimensión.	1
1.2.	Distribución de probabilidad de una caminata aleatoria con posición inicial $X_0 = 0$, probabilidades de transición simétricas ($p = q = 1/2$) y $t_f = 100$ pasos temporales. Se visualizan únicamente las posiciones con probabilidad distinta de cero.	3
1.3.	Acción del operador de desplazamiento de una caminata cuántica discreta en una línea.	6
1.4.	Distribución de probabilidad de la caminata cuántica unitaria descrita por la ec. (1.8), con estado inicial $ \psi_0\rangle = 0\rangle \otimes +_y\rangle$ y $t_f = 100$ pasos de evolución temporal.	8
1.5.	Canal cuántico de phase flip y depolarizing.	17
2.1.	Configuración experimental en la que se basó el modelo de decoherencia. Tomada de la ref. [21].	23
3.1.	Distribución de probabilidad para caminatas cuánticas con decoherencia en el espacio de la moneda modelada por el canal de <i>phase-flip</i> [cf. ec. (3.1)]. Se muestran los resultados para $t_f = 100$ pasos de evolución temporal, con distintas probabilidades de decoherencia p , partiendo en todos los casos del estado inicial $\rho = 0, +_y\rangle\langle 0, +_y $	28
3.2.	Distribución de probabilidad para caminatas cuánticas con decoherencia modelada por el canal de proyecciones [cf. ec. (3.2)]. Se muestran los resultados para $t_f = 100$ pasos de evolución temporal, con distintas probabilidades de decoherencia p , partiendo en todos los casos del estado inicial $\rho = 0, +_y\rangle\langle 0, +_y $	29

- 3.3. Distribución de probabilidad para caminatas cuánticas discretas en el tiempo con decoherencia modelada por el canal de *fuzzy shift* [cf. ec. (2.5)]. Se muestran los resultados para $t_f = 100$ pasos de evolución temporal, con distintas probabilidades de decoherencia p , partiendo en todos los casos del estado inicial $\rho = |0, +_y\rangle\langle 0, +_y|$ 30
- 3.4. Comparación de la distribución de probabilidad de una DTQW sujeta a decoherencia frente a caminatas aleatorias con posición inicial desplazada. La curva azul representa la evolución de 100 pasos de una caminata cuántica con decoherencia dada por el canal de *fuzzy shift* [ec. (2.5)], con probabilidad de decoherencia $p = 0.5$ y estado inicial $\rho = |0, +_y\rangle\langle 0, +_y|$. Las curvas amarilla y verde muestran las distribuciones de dos caminatas aleatorias independientes cuyas posiciones iniciales son 61 y 140, respectivamente. Se observa que, si bien esta caminata cuántica presenta dos picos alineados con los picos de las caminatas aleatorias, la probabilidad es mayor en la región central y menor en los picos en comparación con el comportamiento clásico. . . 31
- 3.5. En el panel superior se muestran las distribuciones de probabilidad de caminatas cuánticas con decoherencia modelada por el canal de *fuzzy shift* [ec. (2.5)] con estado inicial $\rho = |0, +_y\rangle\langle 0, +_y|$ y $t_f = 100$ pasos de evolución temporal, para distintas probabilidades p . En el panel inferior se muestra la gráfica de la desviación estándar en función del tiempo para cada valor de p anterior. 32
- 3.6. En el panel superior se muestran las distribuciones de probabilidad de caminatas cuánticas con decoherencia modelada por el canal de proyecciones [ec. (3.2)] con estado inicial $\rho = |0, +_y\rangle\langle 0, +_y|$ y $t_f = 100$ pasos de evolución temporal, para distintas probabilidades p . En el panel inferior se muestra la gráfica de la desviación estándar en función del tiempo para cada valor de p anterior. 33

3.7.	Coeficiente de determinación R^2 en función de la probabilidad p de que ocurra decoherencia modelada por el canal de <i>fuzzy shift</i> [ec. (2.5)] (líneas azul y amarilla) y por el canal de proyecciones [ec. (3.2)] (líneas verde y roja), para una caminata cuántica con estado inicial $\rho = 0, +_y\rangle\langle 0, +_y $ y $t_f = 100$ pasos de evolución. La línea azul representa qué tan bien ajusta el comportamiento de las caminatas al régimen cuántico ($\sigma \propto t$), mientras que la línea amarilla representa qué tan bien ajusta el comportamiento de las caminatas al régimen clásico ($\sigma \propto \sqrt{t}$). Se observa que para el canal de <i>fuzzy shift</i> hay un mejor ajuste con el comportamiento cuántico para todos los valores de p , mientras que para el canal de proyecciones hay una transición entre el comportamiento cuántico y clásico.	34
3.8.	Matriz de densidad reducida de la posición de una caminata cuántica sin decoherencia [modelada por la ec. (2.3)], con estado inicial $\rho_0 = 0, +_y\rangle\langle 0, +_y $ y $t_f = 10$ pasos de evolución temporal.	36
3.9.	Matriz de densidad reducida de la posición de una caminata con probabilidad $p = 0.5$ de que ocurra decoherencia modelada por el canal de <i>fuzzy shift</i> [ec. (2.5)] con estado inicial $\rho_0 = 0, +_y\rangle\langle 0, +_y $ y $t_f = 10$ pasos de evolución temporal.	36
3.10.	Matriz de densidad reducida de la posición de una caminata cuántica con probabilidad $p = 0.5$ de que ocurra decoherencia modelada por el canal de <i>fuzzy shift</i> [ec. (2.5)], con estado inicial $\rho = 0, +_y\rangle\langle 0, +_y $ y $t_f = 100$ pasos de evolución temporal.	37
3.11.	Ajuste a la escala del gradiente de color de la fig. 3.10 para resaltar elementos con menor magnitud relativa en la matriz de densidad. El 3.125 % de los valores más pequeños es coloreado en la escala morada y el resto es de color rojo.	37
3.12.	Norma l_1 de coherencia normalizada en función del tiempo. Se muestran $t_f = 100$ pasos de evolución para tres dinámicas distintas: una caminata cuántica con probabilidad $p = 0.5$ de que ocurra decoherencia modelada por el canal de <i>fuzzy shift</i> [ec. (2.5)]; una caminata cuántica sin decoherencia [ec. (2.3)]; y el límite clásico del canal de proyecciones [ec. (3.2)]. En todos los casos se empleó el estado inicial $\rho_0 = 0, +_y\rangle\langle 0, +_y $	37

- 3.13. Evolución temporal de la pureza γ de la matriz de densidad del sistema total (panel superior) y de la matriz de densidad reducida de la posición (panel inferior). Se muestran $t_f = 100$ pasos de evolución para tres dinámicas distintas: una caminata cuántica con probabilidad $p = 0.5$ de que ocurra decoherencia modelada por el canal de *fuzzy shift* [ec. (2.5)]; una caminata cuántica sin decoherencia [ec. (2.3)]; y el límite clásico del canal de proyecciones [ec. (3.2)]. En todos los casos se empleó el estado inicial $\rho_0 = |0, +_y\rangle\langle 0, +_y|$ 39
- 3.14. Representación en la esfera de Bloch de los estados $|0\rangle$, $|1\rangle$, $|+\rangle$, $|-\rangle$, $|+_y\rangle$ y $|-_y\rangle$ 40
- 3.15. Comparación de distribuciones de probabilidad entre una caminata cuántica sin decoherencia [ec. (2.3)] y una caminata cuántica con probabilidad $p = 0.5$ de que ocurra decoherencia modelada por el canal de *fuzzy shift* [ec. (2.5)]. En el panel de la izquierda se emplea el estado inicial $\rho = |0, 0\rangle\langle 0, 0|$ para ambas dinámicas, mientras que en el panel derecho se emplea el estado inicial $\rho = |0, 1\rangle\langle 0, 1|$. Todos los resultados corresponden a $t_f = 100$ pasos de evolución temporal. 41
- 3.16. Comparación de distribuciones de probabilidad entre una caminata cuántica sin decoherencia [ec. (2.3)] y una caminata cuántica con probabilidad $p = 0.5$ de que ocurra decoherencia modelada por el canal de *fuzzy shift* [ec. (2.5)]. En el panel de la izquierda se emplea el estado inicial $\rho = |0, +_x\rangle\langle 0, +_x|$ para ambas dinámicas, mientras que en el panel derecho se emplea el estado inicial $\rho = |0, -_x\rangle\langle 0, -_x|$. Todos los resultados corresponden a $t_f = 100$ pasos de evolución temporal. 41
- 3.17. Comparación de distribuciones de probabilidad entre una caminata cuántica sin decoherencia [ec. (2.3)] y una caminata cuántica con probabilidad $p = 0.5$ de que ocurra decoherencia modelada por el canal de *fuzzy shift* [ec. (2.5)]. En el panel de la izquierda se emplea el estado inicial $\rho = |0, +_y\rangle\langle 0, +_y|$ para ambas dinámicas, mientras que en el panel derecho se emplea el estado inicial $\rho = |0, -_y\rangle\langle 0, -_y|$. Todos los resultados corresponden a $t_f = 100$ pasos de evolución temporal. 42
- 3.18. Desviación estándar en función del tiempo de las caminatas decoherentes de las figs. 3.15, 3.16 y 3.17 (líneas punteadas); junto al mejor ajuste entre el comportamiento cuántico y el clásico (líneas sólidas). 42

B.1. Día 1, inauguración del evento.	57
B.2. Día 2, informando a visitantes sobre la carrera	57
B.3. Día 3, visitando los laboratorios	57
B.4. Día 4, foto con el <i>staff</i> del día	57
B.5. <i>Notebook</i> de la primera sesión.	58
B.6. <i>Notebook</i> de la segunda sesión.	59
B.7. <i>Notebook</i> de la tercera sesión.	59
B.8. <i>Notebook</i> de la cuarta sesión.	60
B.9. <i>Notebook</i> de la quinta sesión.	60

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolo	Significado
$ \psi\rangle$	<i>ket</i> , vector en la notación de Dirac
$\langle\psi $	<i>bra</i> , funcional en la notación de Dirac
$\langle\psi \phi\rangle$	producto interno en la notación de Dirac
$ \psi\rangle\langle\phi $	producto externo en la notación de Dirac
$ \psi, \phi\rangle$	producto tensorial
$\{p_i, \psi_i\rangle\}$	ensamble de estados
ρ	matriz/operador de densidad
U	operador unitario
S	operador de desplazamiento condicional
C	operador de moneda
$\mathbb{1}$	operador identidad
$\mathcal{H}$	espacio de Hilbert
σ_i	i -ésima matriz de Pauli
$\vec{\sigma}$	vector de matrices de Pauli
$\mathcal{E}(\rho)$	canal cuántico
$\text{Tr}_A[\rho]$	traza parcial sobre el sub-espacio A

OBJETIVOS

General

Verificar el impacto de la decoherencia, modelada mediante el canal de *fuzzy shift*, sobre las propiedades cuánticas de una caminata cuántica discreta unidimensional para determinar si esta induce una transición hacia el límite clásico de una caminata aleatoria.

Específicos

- Formular un modelo de decoherencia basado en el modelo experimental de caminata cuántica en una dimensión de Wang *et al.* [21], implementado en plataformas fotónicas.
- Reformular el modelo de caminatas cuánticas propuesto por Wang *et al.* [21] empleando el formalismo de matrices de densidad a fin de poder utilizar la representación de canales cuánticos de nuestra decoherencia para realizar la evolución temporal del sistema.
- Implementar numéricamente el modelo de caminata cuántica con evolución modelada por el canal cuántico formulado.
- Investigar el efecto del modelo de decoherencia en la evolución y propiedades cuánticas del modelo de caminata cuántica unitaria.

INTRODUCCIÓN

Las caminatas cuánticas discretas en el tiempo (DTQW, por sus siglas en inglés) representan un modelo de gran utilidad en la información cuántica, debido a las ventajas algorítmicas que ofrecen frente a sus contrapartes clásicas [18]. A diferencia de las caminatas aleatorias clásicas donde la propagación de la posición del caminante es proporcional a la raíz cuadrada del número de paso, las DTQW muestran una propagación de la posición proporcional al número de paso. Esta diferencia en la tasa de propagación es la base de la eficiencia de los algoritmos cuánticos basados en caminatas cuánticas.

Un área de estudio muy importante dentro del campo de las caminatas cuánticas es el efecto que tiene la decoherencia sobre las mismas [2, 22, 16, 10], pues cualquier implementación de sistemas cuánticos debe lidiar inevitablemente con ella. La interacción con el entorno induce procesos que destruyen gradualmente las superposiciones y coherencia del sistema cuántico, lo que resulta inevitablemente en modificaciones a su comportamiento que interesa conocer. Entender el efecto de estos procesos de decoherencia en las caminatas cuánticas tiene muchas utilidades, desde ser usados para medir las propiedades cuánticas (cuanticidad) de tecnologías cuánticas [20] hasta ofrecer ventajas en algunos algoritmos cuánticos [8].

En este trabajo proponemos un canal cuántico denominado *fuzzy shift*, inspirado en los canales de *fuzzy measurements*. Una *fuzzy measurement* modela los errores de medición en los cuales, en sistemas de múltiples cuerpos, existe una posibilidad de que el aparato de medición se confunda entre distintas partículas [13]. A diferencia de las *fuzzy measurements* en donde la confusión ocurre entre distintas partículas, en el *fuzzy shift* la confusión ocurre entre diferentes elementos de la base del espacio de Hilbert de la posición del caminante a causa de imperfecciones en elementos de la implementación experimental de Wang *et al.* [21] en lugar de los aparatos de medición. Para estudiar el efecto del canal de *fuzzy shift* se analizó la evolución temporal de la desviación estándar, la pureza y la norma l_1 de coherencia, demostrando que la implementación fotónica de Wang *et al.* [21] conserva sus propiedades cuánticas ante

esta fuente de error.

El presente informe se estructura de la siguiente manera: el Capítulo 1 expone los fundamentos teóricos necesarios, abordando las caminatas aleatorias y cuánticas, el formalismo de matrices de densidad y los canales cuánticos. En el Capítulo 2 se presenta el problema, detallando la implementación experimental de la caminata cuántica y la motivación física detrás del canal de *fuzzy shift*. El Capítulo 3 discute los resultados obtenidos, evaluando la cuanticidad del sistema bajo el canal propuesto mediante la desviación estándar, la pureza y la norma l_1 de coherencia. Posteriormente se resumen los resultados de este trabajo en el capítulo de Conclusiones. Finalmente, el Apéndice A detalla la implementación numérica desarrollada en Wolfram Language, y el Apéndice B describe el trabajo social realizado en los ejes de extensión y docencia.

1. Preliminares

1.1. Caminatas aleatorias

Las caminatas aleatorias constituyen el fundamento clásico sobre el cual se construyen los modelos de caminatas cuánticas que estudiaremos en este trabajo. Dentro de las caminatas aleatorias existen modelos discretos y continuos en el tiempo. En las caminatas aleatorias continuas (como el movimiento browniano), la evolución se modela mediante ecuaciones de difusión estocásticas para todo instante temporal. Por el contrario, en las caminatas discretas, la dinámica consiste en una sucesión de pasos secuenciales en una red definida. Para mantener el paralelo con el modelo de caminatas cuánticas que estudiaremos en este trabajo, nos centraremos exclusivamente en las caminatas aleatorias discretas en el tiempo y en una sola dimensión.

1.1.1. Modelo matemático de una caminata aleatoria

Formalmente, las caminatas aleatorias son un proceso estocástico simple en el cual un «caminate» se desplaza a través del espacio mediante pasos discretos, que dependen de una variable aleatoria [3]. En este trabajo nos centraremos únicamente en las caminatas discretas unidimensionales, las cuales se producen sobre el espacio de los números enteros.

En este modelo, el caminate se encuentra en una posición determinada y, en cada paso temporal, puede moverse hacia su derecha (+1) con una probabilidad p o hacia su izquierda (-1) con una probabilidad q , donde se cumple que $p + q = 1$. Un ejemplo visual de esta dinámica espacial se ilustra en la fig. 1.1.

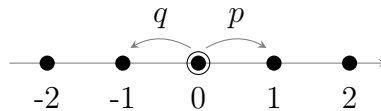


Figura 1.1. Esquema de la dinámica de una caminata aleatoria en una dimensión.

Para los instantes temporales siguientes, el caminante aplica esta misma regla de forma recursiva desde su nueva posición. De este modo, si definimos X_t como la variable aleatoria que representa la posición del caminante en el tiempo t , podemos escribir las probabilidades de transición entre estados de la siguiente forma:

$$P(X_{t+1} = j \mid X_t = i) = \begin{cases} p & \text{si } j = i + 1, \\ q & \text{si } j = i - 1, \\ 0 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases} \quad (1.1)$$

A partir de esta ecuación es directo notar que las probabilidades de transición son homogéneas, ya que las reglas de desplazamiento no dependen del tiempo t . Esto hace intuitivamente claro que el proceso cumple con la propiedad de Markov, pues el estado actual depende únicamente del estado inmediatamente anterior y no de la historia previa del caminante.

Sabiendo que las caminatas aleatorias son un proceso markoviano, podemos definir el estado de la caminata en $t \geq 1$ como:

$$X_t = X_0 + \sum_{i=1}^t \xi_i, \quad (1.2)$$

donde $\xi_i \in \{-1, +1\}$ son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas tales que $P(\xi_i = +1) = p$ y $P(\xi_i = -1) = q$. Además, para analizar el comportamiento de X_t en función del tiempo t , podemos establecer, sin pérdida de generalidad, que el caminante inicia en el origen ($X_0 = 0$).

1.1.2. Propiedades de las caminatas aleatorias

Las caminatas aleatorias exhiben comportamientos de transporte de naturaleza disipativa. Las dos métricas principales para entender el comportamiento de las caminatas aleatorias son la forma asintótica de sus distribuciones de probabilidad espacial y la rapidez con la cual se dispersan.

1.1.2.1. Distribución de probabilidad de la posición del caminante

Para una caminata aleatoria que inicia en el origen, la probabilidad estricta de hallar al caminante en una posición x tras t iteraciones sigue una distribución binomial. Tomando en cuenta que se requieren R_t pasos hacia la derecha y L_t pasos hacia la izquierda de manera que $R_t + L_t = t$ y $R_t - L_t = X_t$, la probabilidad explícita

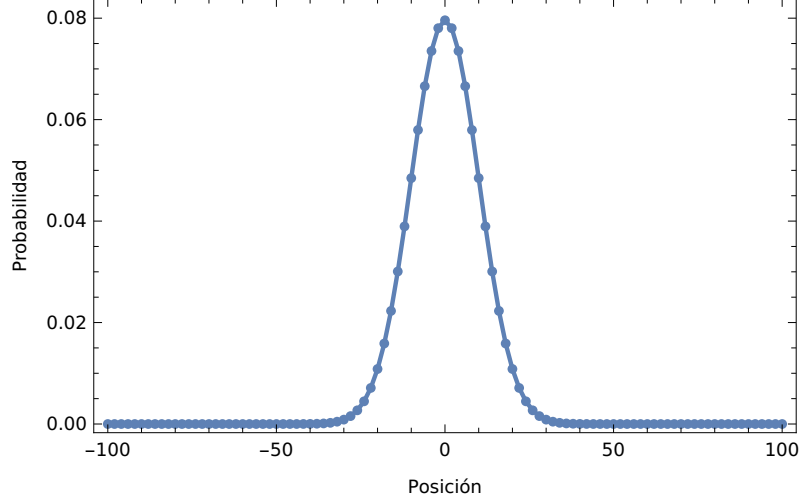


Figura 1.2. Distribución de probabilidad de una caminata aleatoria con posición inicial $X_0 = 0$, probabilidades de transición simétricas ($p = q = 1/2$) y $t_f = 100$ pasos temporales. Se visualizan únicamente las posiciones con probabilidad distinta de cero.

está dada por:

$$P(X_t = x | X_0 = 0) = \binom{t}{\frac{1}{2}(t+x)} p^{\frac{1}{2}(t+x)} q^{\frac{1}{2}(t-x)} \quad (1.3)$$

donde el resultado únicamente es distinto de cero cuando x y t comparten la misma paridad.

En la fig. 1.2 se puede apreciar la distribución de probabilidad de una caminata aleatoria, en el eje horizontal se colocan las posiciones en las que el caminante puede estar y en el eje vertical la probabilidad de que el caminante se encuentre en dicha posición.

1.1.2.2. Desviación estándar

El modo en que la distribución de una caminata aleatoria se esparce a lo largo del dominio espacial es la característica definitoria del transporte difusivo. Esta propagación se estudia analizando la desviación estándar del sistema a través del tiempo.

Conociendo que cada variable de salto ξ posee una varianza $\text{Var}(\xi) = 4pq$, la varianza total de la posición X_t aumenta de forma estrictamente lineal a causa de la independencia estadística de cada paso:

$$\text{Var}(X_t) = 4pqt. \quad (1.4)$$

Por consiguiente, las caminatas aleatorias presentan una desviación estándar proporcional a la raíz cuadrada del tiempo ($\sigma \propto \sqrt{t}$).

Adicionalmente, por el Teorema del Límite Central, para tiempos t suficientemente grandes la distribución binomial se aproxima a una distribución Gaussiana continua con media $\mu = t(p - q)$ y varianza $\sigma^2 = 4pqt$. Este ensanchamiento difusivo ($\sigma \propto \sqrt{t}$) es considerablemente más lento y contrasta de manera fundamental con el transporte balístico lineal ($\sigma \propto t$) propio de las caminatas cuánticas unitarias que exploraremos en la siguiente sección. Esta diferencia en la tasa de propagación es, de hecho, la que justifica la amplia ventaja y eficiencia algorítmica que ofrecen las caminatas cuánticas en tareas de búsqueda.

1.2. Caminatas cuánticas

Las caminatas cuánticas constituyen la contraparte cuántica de las caminatas aleatorias. Mientras que en las caminatas aleatorias el caminante ocupa una única posición en cualquier paso de tiempo y se mueve de acuerdo a una regla de probabilidad (como el lanzamiento de una moneda), en las caminatas cuánticas el caminante existe en una superposición de posiciones.

Existen dos tipos de caminatas cuánticas: continuas y discretas en el tiempo. En las caminatas continuas, la evolución está gobernada por un Hamiltoniano mediante la ecuación de Schrödinger, lo que permite una evolución continua para todo instante temporal. En las caminatas discretas, la dinámica se construye a partir de la aplicación iterada de dos operadores unitarios en pasos bien definidos [20].

Las caminatas cuánticas discretas en el tiempo (DTQW por sus siglas en inglés) consisten en dos sistemas que interactúan entre sí: el caminante, asociado a la posición en una red discreta, y una moneda cuántica, que introduce un grado de libertad interno necesario para definir la dirección del movimiento del caminante. En este trabajo nos centraremos exclusivamente en las caminatas cuánticas discretas en el tiempo en una dimensión. Elegimos enfocarnos en este modelo debido a su sencillez conceptual, ya que al estar conformado de manera explícita por los sistemas de moneda y caminante, facilita la comparación teórica y la comprensión de su equivalencia con los modelos de caminatas clásicas.

1.2.1. Modelo matemático de una DTQW

1.2.1.1. Espacios de Hilbert

La descripción de una DTQW requiere un espacio de Hilbert compuesto $\mathcal{H}$, que corresponde al producto tensorial de dos subespacios: $\mathcal{H} = \mathcal{H}_p \otimes \mathcal{H}_c$.

- El espacio de la posición, $\mathcal{H}_p$, describe los sitios discretos en los que se puede encontrar el caminante. Este espacio está generado por la base ortonormal $\{|x\rangle : x \in \mathbb{Z}\}$, donde cada estado $|x\rangle$ representa una posición bien definida en la red.
- El espacio de la moneda, $\mathcal{H}_c$, representa un grado de libertad interno necesario para determinar la dirección del movimiento del caminante en cada paso. Este espacio está generado por una base $\{|c\rangle\}$, la cual puede interpretarse como la dirección de movimiento del caminante.

Un estado general del sistema compuesto puede escribirse como

$$|\psi_t\rangle = \sum_x \sum_c (\alpha_{x,c,t} |x\rangle \otimes |c\rangle), \quad (1.5)$$

donde las $\alpha_{x,c,t}$ son amplitudes de probabilidad complejas que satisfacen la condición de normalización. Esta estructura permite la coexistencia de múltiples trayectorias posibles, cuya interferencia caracteriza la dinámica de las caminatas cuánticas.

1.2.1.2. Operadores de evolución de una DQWL

En este trabajo emplearemos el modelo de DTQW más ampliamente utilizado: las DQWL (del inglés *discrete quantum walks on a line*), las cuales son la versión unidimensional de las DTQW. La evolución temporal de una DQWL está determinada por la aplicación iterada de operadores unitarios que actúan sobre el espacio compuesto. En particular, un paso de la caminata se construye a partir de dos operadores fundamentales: el operador de moneda y el operador de desplazamiento.

- El operador de moneda $\hat{C}$ es una transformación unitaria que actúa exclusivamente sobre el subespacio $\mathcal{H}_c$. Su función es preparar al caminante en una superposición de sus estados internos antes de realizar el desplazamiento. Una elección común en la literatura es la moneda de Hadamard, aunque en general puede considerarse cualquier operador unitario de dos niveles.

- El operador de desplazamiento $\hat{S}$ es un operador que desplaza al caminante dependiendo del estado de la moneda. Este entrelaza la posición del caminante con el estado de su moneda. El operador de desplazamiento más ampliamente usado en la literatura está dado por la expresión:

$$\hat{S} = \sum_x (|x+1\rangle\langle x| \otimes |0\rangle\langle 0| + |x-1\rangle\langle x| \otimes |1\rangle\langle 1|). \quad (1.6)$$

Bajo esta regla, si la moneda se encuentra en el estado $|0\rangle$ el caminante se desplaza una unidad hacia la derecha, mientras que si está en el estado $|1\rangle$ se desplaza una unidad hacia la izquierda, como se ilustra en la fig. 1.3.

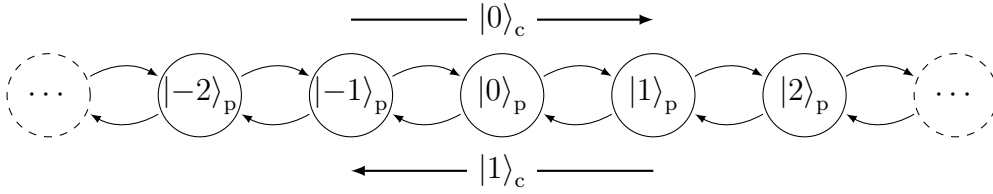


Figura 1.3. Acción del operador de desplazamiento de una caminata cuántica discreta en una línea.

Un paso completo de la caminata se define entonces mediante la aplicación sucesiva del operador de moneda y el operador de desplazamiento. Definiendo el operador unitario total como

$$\hat{U} = \hat{S}\hat{C}, \quad (1.7)$$

la evolución del sistema tras t pasos, partiendo de un estado inicial puro $|\psi_0\rangle$, viene dada por

$$|\psi_t\rangle = \hat{U}^t |\psi_0\rangle. \quad (1.8)$$

1.2.2. Ejemplo de DQWL

Calcularemos el primer paso de evolución de la caminata cuántica más ampliamente estudiada en la literatura: la caminata de Hadamard. Esta es una DTQW unidimensional que emplea el operador de Hadamard como moneda. Este operador está dado por

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.9)$$

Suponiendo que el caminante empiece en la posición $|0\rangle$ con la moneda preparada en $|0\rangle$, calcularemos el estado de la caminata luego de aplicar el operador de evolución

al estado inicial. Para ello, aplicaremos primero la moneda:

$$\hat{H} |\psi_0\rangle = |0\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle \otimes |0\rangle + |0\rangle \otimes |1\rangle), \quad (1.10)$$

y luego el operador de desplazamiento:

$$|\psi_1\rangle = \hat{S}\hat{H} |\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle \otimes |0\rangle + |-1\rangle \otimes |1\rangle). \quad (1.11)$$

Vemos como pasamos de un estado inicial completamente posicionado en la posición $|0\rangle$ a un estado final en una superposición equiprobable entre las posiciones $|-1\rangle$ y $|1\rangle$.

1.2.3. Propiedades de las DTQW

Las DTQW presentan propiedades notablemente distintas a sus contrapartes clásicas. Estas diferencias se manifiestan principalmente en la forma de la distribución de probabilidad y en la manera en que esta se dispersa en el tiempo. A continuación se describen dos de las propiedades más relevantes.

1.2.3.1. Distribución de probabilidad de la posición del caminante

La distribución de probabilidad de encontrar al caminante en la posición x en el tiempo t se define como

$$P(x, t) = \sum_{c \in \{|0\rangle, |1\rangle\}} |\langle x, c | \psi_t \rangle|^2. \quad (1.12)$$

A diferencia de la caminata aleatoria clásica, cuya distribución tiende a una binomial, la DTQW genera una distribución característica con dos máximos bien definidos que se desplazan en direcciones opuestas conforme avanza el tiempo, como se muestra en la fig. 1.4. La región situada entre estos máximos es altamente oscilatoria, lo cual es consecuencia directa de la interferencia constructiva y destructiva entre las amplitudes de probabilidad de los distintos recorridos que puede seguir el caminante. Además, la forma general y la simetría de esta distribución dependen de la moneda y del estado inicial empleado [5].

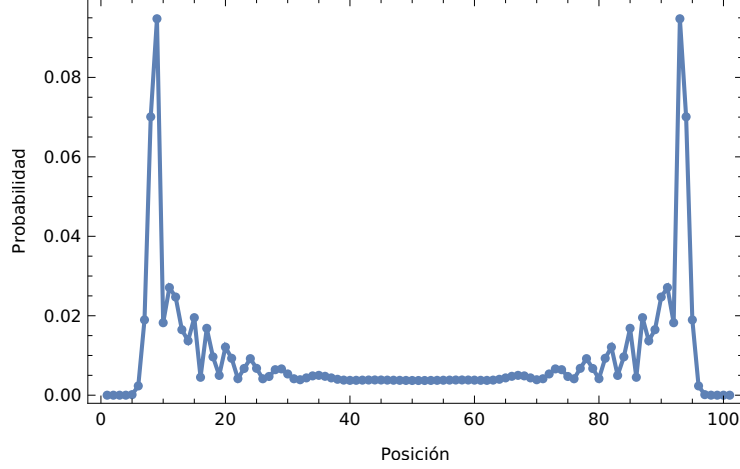


Figura 1.4. Distribución de probabilidad de la caminata cuántica unitaria descrita por la ec. (1.8), con estado inicial $|\psi_0\rangle = |0\rangle \otimes |+_y\rangle$ y $t_f = 100$ pasos de evolución temporal.

1.2.3.2. Desviación estándar

La forma en que la distribución de probabilidad de una DTQW se dispersa en el espacio difiere drásticamente de su contraparte clásica. Esta dispersión espacial se cuantifica mediante la desviación estándar de la posición. En un tiempo t , la desviación estándar se define como

$$\sigma(t) = \sqrt{\langle \hat{X}^2 \rangle_t - \langle \hat{X} \rangle_t^2},$$

donde $\langle \hat{X} \rangle_t = \sum_x x P_x$ y $\langle \hat{X}^2 \rangle_t = \sum_x x^2 P_x$ son el primer y segundo momento de distribución, respectivamente.

En una caminata cuántica unidimensional, la interferencia favorece la propagación hacia los extremos de la distribución. Como resultado, la varianza crece de forma cuadrática con el tiempo ($\sigma^2 \propto t^2$), lo cual implica una dependencia lineal para la desviación estándar ($\sigma \propto t$) [15]. Esta dispersión balística es una de las principales razones por las que los algoritmos basados en caminatas cuánticas pueden ofrecer un salto de eficiencia frente a los algoritmos clásicos.

1.3. Operador de densidad

El operador de densidad (también llamado matriz de densidad) es una generalización del vector de estado o función de onda [12, 17]: mientras estos solo pueden representar estados puros, las matrices de densidad pueden representar también estados mixtos. Daremos a continuación las definiciones para estados puros y mixtos.

1.3.1. Estados puros y mixtos

Definición 1.1 (Estado puro). Un estado cuántico puro es un estado para el cual la función de onda del sistema se conoce con certeza completa. Matemáticamente un estado puro puede escribirse con un solo ket, $|\psi\rangle$.

Definición 1.2 (Estado mixto). Un estado cuántico mixto es un tipo de estado cuántico más general que los estados puros, estos reflejan una falta de información completa sobre el sistema al que están describiendo. Esto puede ocurrir al desconocer la preparación del estado de nuestro sistema¹ (mezclas propias) o al describir el estado de un subsistema parte de un sistema completo conocido² (mezcla impropia). Para cualquiera de estos casos el estado del sistema es un estado mixto el cual puede ser representado por medio del formalismo de la matriz de densidad.

Definidos los estados puros y mixtos, se introducirá el concepto de matriz de densidad utilizando las mezclas propias como punto de partida³. Dado un ensamble (o colectividad estadística) de estados puros $\{p_i, |\phi_i\rangle\}$ (es decir, que con probabilidad p_i , el sistema se encuentra en el estado $|\phi_i\rangle$), el estado del sistema puede describirse mediante la matriz de densidad como

$$\rho = \sum_i p_i |\phi_i\rangle\langle\phi_i|. \quad (1.13)$$

Para ejemplificar la diferencia entre ambos tipos de estados haremos un experimento mental pasando luz preparada en cada tipo de estado por un filtro polarizador y mediremos la intensidad de la luz transmitida. Recordemos que un polarizador transmite la componente de la luz alineada con su eje de polarización y bloquea la componente ortogonal, es decir, la probabilidad de transmisión está dada por el cuadrado del módulo del coeficiente asociado a la componente de polarización del filtro.

En este experimento mental haremos pasar dos haces de luz por diversos filtros polarizadores, estando el primer haz preparado en el estado $|\psi_1\rangle = |D\rangle = (|H\rangle + |V\rangle)/\sqrt{2}$ y el segundo preparado en el ensamble $\rho_2 = \{1/2, |H\rangle; 1/2, |V\rangle\}$.

¹e. g.: Con un 50 % de probabilidad el sistema se encuentra en el estado $|0\rangle$ y con 50 % en el estado $|1\rangle$

²e. g.: Un sistema de dos qubits que se encuentra en un estado de Bell pero nos interesa describir únicamente el estado de uno de los qubits

³Más adelante, una vez definida la traza parcial y habiendo caracterizado los operadores de densidad, será trivial para el lector entender que el formalismo de matriz de densidad describe también mezclas impropias.

- Filtro con polarización $|H\rangle$

Para el estado puro se puede ver que la probabilidad de que un fotón pase será de $P(H|\psi_1) = |1/\sqrt{2}|^2 = 1/2$. Para el estado mixto, por definición, $P(H|\rho_2) = 1/2$.

- Filtro con polarización $|V\rangle$

Para este filtro el análisis es exactamente igual al anterior, entonces $P(V|\psi_1) = 1/2$ y $P(V|\rho_2) = 1/2$.

- Filtro con polarización $|L\rangle$

Para encontrar la probabilidad con el estado puro es necesario reescribirlo como $|\psi_1\rangle = [(1-i)|L\rangle + (1+i)|R\rangle]/2$. Luego, la probabilidad de que un fotón pase será de $P(L|\psi_1) = |(1-i)/2|^2 = 1/2$. Para el estado mixto también reescribiremos el ensamble en la base $\{|L\rangle, |R\rangle\}$, obteniendo $\rho_2 = \{1/2, |L\rangle; 1/2, |R\rangle\}$, por lo que la probabilidad será de nuevo $P(L|\rho_2) = 1/2$.

- Filtro con polarización $|R\rangle$

Ya que tenemos $|\psi_1\rangle$ y ρ_2 reescritos es fácil ver que $P(R|\psi_1) = 1/2$ y $P(R|\rho_2) = 1/2$.

- Filtro con polarización $|D\rangle$

En este filtro ya se ve la diferencia entre ambos estados, ya que $|\psi_1\rangle = |D\rangle$ entonces $P(D|\psi_1) = 1$. Sin embargo el ensamble ρ_2 en la base $\{|D\rangle, |A\rangle\}$ se escribe como $\rho_2 = \{1/2, |D\rangle; 1/2, |A\rangle\}$, por lo tanto la probabilidad es $P(D|\rho_2) = 1/2$.

- Filtro con polarización $|A\rangle$

Considerando que $|\psi_1\rangle$ ya se encuentra escrito en la base $\{|D\rangle, |A\rangle\}$, entonces la probabilidad será de $P(A|\psi_1) = 0$. Por otro lado, para el estado mixto la probabilidad continuará siendo $P(A|\rho_2) = 1/2$.

En conclusión, podemos ver que el comportamiento entre estados puros y mixtos es diferente. En este ejemplo particular pudimos ver que, pese a la naturaleza cuántica del estado puro $|\psi_1\rangle$, podemos saber con certeza completa que el estado siempre será $|D\rangle$; mientras que con el estado mixto ρ_2 , además de su naturaleza cuántica, tiene una componente no determinista adicional que nunca nos dará certeza completa para ninguna base de polarización. Ya que el resultado obtenido con el estado mixto es

inaccesible con un solo vector de estado, el formalismo del operador de densidad (los ensambles) hace más conveniente usarlo cuando el sistema pase por estados mixtos.

Teorema 1.3 (Criterio para decidir si un estado es puro o mixto [12]). *Sea ρ un operador de densidad, para un estado puro se cumplirá que $\text{Tr}(\rho^2) = 1$, mientras que para estados mixtos tendremos que $\text{Tr}(\rho^2) < 1$.*

Demostración. Tomaremos un operador de densidad cualquiera

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|,$$

donde los $|\psi_i\rangle$ son ortonormales y $\sum_i p_i = 1$ con $p_i \in [0, 1]$. Calcularemos ahora el cuadrado de ρ :

$$\begin{aligned} \rho^2 &= \left(\sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \right) \left(\sum_j p_j |\psi_j\rangle\langle\psi_j| \right), \\ &= \sum_{i,j} p_i p_j |\psi_i\rangle\langle\psi_i|\psi_j\rangle\langle\psi_j|, \\ &= \sum_{i,j} p_i p_j |\psi_i\rangle\langle\psi_j| \delta_{ij}, \\ &= \sum_i p_i^2 |\psi_i\rangle\langle\psi_i|. \end{aligned}$$

Aplicando la traza, obtenemos

$$\begin{aligned} \text{Tr}[\rho^2] &= \text{Tr} \left[\sum_i p_i^2 |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \right], \\ &= \sum_i p_i^2 \text{Tr}[|\psi_i\rangle\langle\psi_i|], \\ &= \sum_i p_i^2. \end{aligned}$$

Dado que $0 \leq p_i \leq 1$, se sigue que $p_i^2 \leq p_i$ para todo i . Por lo tanto:

$$\text{Tr}[\rho^2] = \sum_i p_i^2 \leq \sum_i p_i = 1.$$

Esto quiere decir que para todo operador de densidad ρ se cumple que

$$\text{Tr}[\rho^2] \leq 1.$$

Para analizar la igualdad, observemos que la diferencia entre la suma de las probabilidades y la suma de sus cuadrados es:

$$1 - \text{Tr}(\rho^2) = \sum_i p_i - \sum_i p_i^2 = \sum_i p_i(1 - p_i).$$

Como cada término $p_i(1 - p_i) \geq 0$ (ya que $0 \leq p_i \leq 1$), la suma total es igual a cero si y solo si cada término individual es cero:

$$p_i(1 - p_i) = 0 \quad \forall i.$$

Esta condición se cumple únicamente si para cada i , $p_i = 0$ o $p_i = 1$. Dado que la traza debe sumar 1 ($\sum p_i = 1$), existe exactamente un índice k tal que $p_k = 1$ y $p_{i \neq k} = 0$. Esto corresponde a la definición de un estado puro, $\rho = |\psi_k\rangle \langle \psi_k|$. En cualquier otro caso donde haya más de un $p_i > 0$, la suma $\sum_i p_i(1 - p_i)$ será estrictamente mayor que cero, resultando en $\text{Tr}(\rho^2) < 1$, lo que caracteriza a un estado mixto. $\square$

A la cantidad $\text{Tr}[\rho^2]$ se la llama pureza y tal como se mencionó anteriormente nos permite saber si un estado es puro o mixto, pero además de eso nos da una medida sobre qué tanta información tenemos sobre el estado del sistema. La pureza es un valor comprendido entre $1/d$ (siendo d la dimensión del espacio de Hilbert en el que vive el estado), donde no tenemos ninguna certeza sobre el estado del sistema; y 1, donde tenemos certeza absoluta sobre el estado del sistema.

1.3.2. Caracterización del operador de densidad

El operador de densidad nos dará una manera más conveniente para trabajar con sistemas cuánticos abiertos y simplificará el trabajo matemático que debemos realizar. Para emplear el operador de densidad en sí mismo, y no solo como la representación de un ensamble de estados, será importante dar la caracterización de un operador de densidad. De este modo podremos determinar si un operador cualquiera es un operador de densidad sin necesidad de demostrar que proviene de un ensamble de estados, sino solo verificando que cumple con ciertas propiedades.

Teorema 1.4 (Caracterización del operador de densidad [12]). *Un operador ρ es operador de densidad asociado a un ensamble $\{p_i, |\psi_i\rangle\}$ si y solo si satisface*

1. *(Condición de traza) La traza de ρ debe ser 1.*
2. *(Condición de positividad) ρ debe ser positivo semidefinido.*

Demostración. Para demostrar este teorema es necesario hacerlo en ambas direcciones
 ($\Rightarrow$) Suponiendo un operador de densidad $\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$, entonces

1. Para demostrar la condición de la traza

$$\begin{aligned}\text{Tr}(\rho) &= \text{Tr}\left(\sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|\right), \\ &= \sum_i p_i \text{Tr}(|\psi_i\rangle\langle\psi_i|), \\ &= \sum_i p_i, \\ &= 1.\end{aligned}$$

2. Para la condición de positividad

$$\begin{aligned}\langle\varphi|\rho|\varphi\rangle &= \langle\varphi|\left(\sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|\right)|\varphi\rangle, \\ &= \sum_i p_i \langle\varphi|\psi_i\rangle \langle\psi_i|\varphi\rangle, \\ &= \sum_i p_i |\langle\varphi|\psi_i\rangle|^2, \\ &\geq 0.\end{aligned}$$

En la penúltima línea hemos utilizado el hecho de que las probabilidades $p_i > 0$.

($\Leftarrow$) Suponiendo un operador ρ que cumple con las condiciones de traza y positividad.

Al ser un operador positivo debe tener descomposición espectral

$$\rho = \sum_j \lambda_j |j\rangle\langle j|,$$

donde los λ_j son los autovalores de ρ y deben ser reales y no negativos; y $|j\rangle$ los autovectores normalizados. Donde, además, por la condición de la traza

$$\sum_j \lambda_j = 1.$$

De esto obtenemos que tomando los $|j\rangle$, estados cuánticos; junto a los λ_i , las probabilidades respectivas de los estados. El operador ρ representa un operador de densidad para el ensamble $\{\lambda_j, |j\rangle\}$. $\square$

Con la caracterización del teorema 1.4 formalizamos la representación del operador de densidad. En las siguientes secciones explicaremos la diferencia entre estados puros y mixtos, reformularemos los postulados de la mecánica cuántica y explicaremos la operación de traza parcial para estudiar subsistemas de un sistema compuesto.

1.3.3. Reformulación de los postulados

Para verificar que el operador de densidad es un lenguaje equivalente al de vectores de estado, reformularemos los postulados de la mecánica cuántica empleando este formalismo.

Postulado I: Asociado a cualquier sistema físico cerrado hay un espacio vectorial complejo con producto interno que es completo respecto a la norma inducida por dicho producto interno (*i. e.*, un espacio de Hilbert) conocido como *espacio de estados* del sistema. El estado del sistema está completamente descrito por su *operador de densidad*, el cual es un operador positivo ρ con traza 1, actuando en el espacio de estados del sistema. Si un sistema cuántico se encuentra en el estado ρ_i con probabilidad p_i , entonces el operador de densidad del sistema es

$$\sum_i p_i \rho_i. \quad (1.14)$$

Postulado II: La evolución de un sistema cuántico *cerrado* está descrita por una transformación unitaria. Es decir, el estado ρ del sistema evoluciona según

$$\rho' = U\rho U^\dagger, \quad (1.15)$$

donde U es un operador unitario que actúa sobre el espacio de estados del sistema.

Postulado III: Las mediciones cuánticas están descritas por una colección de *operadores de medición* $\{M_m\}$. Estos son los operadores actuando en el espacio de estados del sistema siendo medido. El índice m se refiere a los resultados que pueden ocurrir en el experimento. Si el estado del sistema cuántico es ρ inmediatamente antes de la medida, entonces la probabilidad de que ocurra el resultado m está dada por

$$p(m) = \text{Tr}(M_m^\dagger M_m \rho), \quad (1.16)$$

y el estado del sistema inmediatamente después de la medición es

$$\frac{M_m \rho M_m^\dagger}{\text{Tr}(M_m^\dagger M_m \rho)}. \quad (1.17)$$

Los operadores de medición satisfacen la *ecuación de completitud*,

$$\sum_m M_m^\dagger M_m = I. \quad (1.18)$$

Postulado IV: El espacio de estados de un sistema físico compuesto es el producto tensorial de los espacios de estados de los sistemas que lo componen. Es decir, si los sistemas están numerados de 1 a n , el espacio de estados total está dado por

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_n. \quad (1.19)$$

Si los subsistemas son preparados de manera independiente, de modo que no existen correlaciones entre ellos, entonces el estado conjunto del sistema está dado por el producto tensorial de los estados individuales:

$$\rho = \rho_1 \otimes \rho_2 \otimes \cdots \otimes \rho_n. \quad (1.20)$$

1.3.4. Matriz de densidad reducida

Como hemos mencionado a lo largo de esta sección, el usar el formalismo de la matriz de densidad para el estudio de la mecánica cuántica provee bastantes ventajas respecto a los vectores de estado especialmente cuando queremos describir estados de sistemas individuales a partir del sistema compuesto. Formalmente, dados dos sistemas físicos A y B descritos por un estado conjunto representado por la matriz de densidad ρ_{AB} , se define la matriz de densidad reducida del subsistema A , denotada como ρ_A , mediante la operación de traza parcial sobre el subsistema B :

$$\rho_A \equiv \text{Tr}_B[\rho_{AB}], \quad (1.21)$$

donde la traza parcial se define como:

$$\text{Tr}_B[\rho_{AB}] = \sum_j \langle \psi_j | \rho | \psi_j \rangle, \quad (1.22)$$

con $\{|\psi_j\rangle\}$ una base ortonormal del espacio de estados del subsistema B .

El operador ρ_A contiene toda la información estadística necesaria para calcular los valores esperados de cualquier observable M que actúe exclusivamente sobre el subsistema A , es decir:

$$\text{Tr}(M\rho_A) = \text{Tr}[(M \otimes \mathbb{1}_B)\rho_{AB}]. \quad (1.23)$$

En términos físicos, esta operación permite extraer las propiedades de A ignorando las correlaciones o grados de libertad del subsistema B .

1.4. Canales cuánticos

Los canales cuánticos permiten describir la evolución de sistemas cuánticos tanto cerrados como abiertos. Un sistema cuántico se considera cerrado si no interactúa con su entorno, lo que implica una evolución unitaria dictada por la ecuación de Schrödinger. Sin embargo, en el mundo real todos los sistemas cuánticos son abiertos; es decir, interactúan con su entorno intercambiando información. En muchos casos esta interacción con el entorno no es despreciable y provoca que la evolución del sistema sea no unitaria, por lo que requerimos una herramienta más general para describir la dinámica. En este trabajo emplearemos para ello el formalismo de canales cuánticos.

Formalmente, un canal cuántico $\mathcal{E}$ es un mapa lineal que transforma operadores de densidad en otros operadores de densidad, representando la dinámica cuántica más general posible. La acción de los canales cuánticos puede interpretarse geométricamente de forma muy intuitiva: es una transformación del vector de Bloch $\vec{r}$ que mapea el estado inicial al final según la relación

$$\rho = \frac{I + \vec{r} \cdot \vec{\sigma}}{2} \quad \mapsto \quad \mathcal{E}(\rho) = \rho' = \frac{I + \vec{r}' \cdot \vec{\sigma}}{2}, \quad (1.24)$$

donde el vector de Bloch del estado final se puede escribir como $\vec{r}' = M\vec{r} + \vec{c}$ con $\vec{r}$ el vector de Bloch del estado inicial, M una matriz real de 3×3 y $\vec{c}$ un vector tridimensional real⁴.

En la fig. 1.5 se observan dos ejemplos de canales cuánticos. En el panel izquierdo se ve el canal *phase flip*, el cual achata la esfera de Bloch en el plano xy haciéndola

⁴Cabe mencionar que para que la transformación sea un canal cuántico se requiere que $\vec{r}'$, M y $\vec{c}$ no violen la preservación de traza y completa positividad. Para dar una imagen geométrica basta con que el lector sepa que para todo $\vec{r}$, $\vec{r}'$ debe permanecer en la esfera de Bloch.

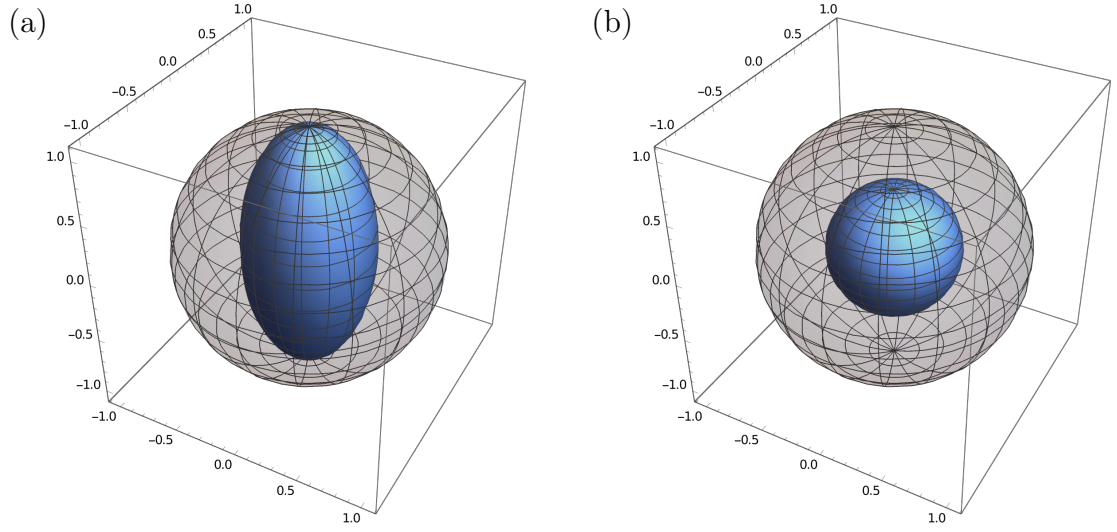


Figura 1.5. Efecto de los canales cuánticos (a) *phase flip*, con $p = 0.25$ y (b) *depolarizing*, con $p = 0.5$, sobre la esfera de Bloch.

tender al eje z . En el panel derecho se observa el canal *depolarizing*, el cual contrae toda la esfera de Bloch de manera uniforme haciéndola tender al estado máximamente mixto.

1.4.1. Propiedades de los canales cuánticos

Para que un mapeo $\mathcal{E}(\rho)$ sea físicamente consistente con los principios de la mecánica cuántica, debe ser CPTP (siglas del inglés *completely positive and trace preserving*), lo que significa que debe ser completamente positivo y preservar la traza de la matriz de densidad. Esto asegura que la matriz de densidad resultante representa un estado físico.

Un mapa es *positivo* si, al ser aplicado a cualquier estado cuántico ρ (que es un operador de densidad y, por lo tanto, positivo semidefinido) de un espacio de Hilbert H , el resultado sigue siendo un operador positivo semidefinido. La *completa positividad* es una condición más fuerte que la *positividad* simple. Un canal cuántico $\mathcal{E}$ es *completamente positivo* porque, para cualquier dimensión n y cualquier estado cuántico ρ en el espacio de Hilbert extendido $H \otimes A$ (donde A es un espacio auxiliar de dimensión n), el operador $(\mathcal{E} \otimes \mathbb{1}_n)\rho$ sigue siendo positivo semidefinido [12]. La completa positividad asegura que, incluso cuando el canal se extiende a un sistema más grande (por ejemplo, al considerar el sistema junto con su entorno), el operador resultante sigue siendo positivo semidefinido. Esto es crucial para garantizar que las probabilidades resultantes de cualquier medida física sean siempre no negativas. Por

otro lado, la preservación de la traza garantiza la conservación de la normalización del estado, pues el estado resultante luego de aplicar el mapa tendrá traza uno, al igual que el estado original.

1.4.2. Representación de canales cuánticos

Cualquier canal cuántico que actúe sobre un sistema S puede modelarse como una evolución unitaria U en un espacio de Hilbert más grande que comprende tanto al sistema S como a un entorno E , seguido de la aplicación de la traza parcial sobre el entorno:

$$\mathcal{E}(\rho) = \text{Tr}_E[U(\rho \otimes \rho_{\text{env}})U^\dagger]. \quad (1.25)$$

Reescribiremos ahora la ec. 1.25 en términos de operadores que actúan únicamente sobre el espacio de Hilbert del sistema S . Sea $\{|e_k\rangle\}$ una base ortonormal para el espacio de estados del entorno (de dimensión finita), y sea $\rho_{\text{env}} = |e_0\rangle\langle e_0|$ el estado inicial del entorno. Asumiendo, sin pérdida de la generalidad, que el estado del entorno comienza en un estado puro, la ec. 1.25 puede reescribirse como

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\rho) &= \sum_k \langle e_k | U[\rho \otimes |e_0\rangle\langle e_0|] U^\dagger | e_k \rangle, \\ &= \sum_k E_k \rho E_k^\dagger, \end{aligned} \quad (1.26)$$

donde $E_k = \langle e_k | U | e_0 \rangle$ es un operador en el espacio de estados del sistema S . La ec. 1.26 se conoce como la representación de Kraus (o representación de operador suma). Los operadores $\{E_k\}$ se conocen como operadores de Kraus (o elementos de operación, respectivamente) del canal cuántico $\mathcal{E}$.

Los operadores de Kraus satisfacen una restricción importante conocida como la relación de completitud. Esta asegura que la traza de $\mathcal{E}(\rho)$ sea igual a uno:

$$\begin{aligned} 1 &= \text{tr}[\mathcal{E}(\rho)], \\ &= \text{tr} \left(\sum_k E_k \rho E_k^\dagger \right), \\ &= \text{tr} \left(\sum_k E_k^\dagger E_k \rho \right). \end{aligned}$$

Dado que esto se cumple para todo ρ , tenemos que

$$\sum_k E_k^\dagger E_k = \mathbb{1}. \quad (1.27)$$

La representación de Kraus es la forma más común de representar canales cuánticos en la literatura, además de ser la más útil para el cálculo de la evolución de sistemas abiertos.

1.5. Decoherencia cuántica

En las secciones 1.3 y 1.4 ya hemos hablado de cómo los formalismos de matriz de densidad y canales cuánticos (sistemas abiertos) son una generalización de los vectores de estado y evolución unitaria (sistemas cerrados). Sin embargo, no hemos ahondado en uno de los fenómenos principales que estos formalismos nos permiten modelar: la decoherencia. En el estudio de sistemas cuánticos reales, es necesario reconocer que ningún sistema físico se encuentra verdaderamente aislado de manera perfecta. La interacción de un sistema cuántico con su entorno resulta en lo que hemos llamado «dinámicas abiertas». Estas dinámicas dan lugar al fenómeno de decoherencia, que engloba procesos de atenuación de fase, atenuación de amplitud, entre otros.

Dentro del formalismo del operador de densidad introducido en la sección 1.3, la decoherencia se manifiesta principalmente como la atenuación de los elementos fuera de la diagonal en la representación matricial del estado de nuestro sistema. Estos elementos, conocidos como coherencias, codifican las relaciones de fase cuántica entre los distintos estados de la base de una superposición. A medida que el sistema interactúa con el entorno, la información sobre estas fases relativas se pierde, provocando que las coherencias tiendan a anularse. Físicamente, esto se traduce en que el sistema pierde la capacidad de exhibir efectos de interferencia cuántica en el marco de las mediciones locales.

Modelar la totalidad de los grados de libertad del sistema junto con los del entorno resulta computacional y analíticamente inviable. Por esta razón, el estudio de la decoherencia recurre al formalismo de los canales cuánticos detallado en la sección anterior. Empleando la traza parcial sobre el espacio de Hilbert del entorno tras la evolución unitaria del sistema total, es posible obtener una descripción efectiva y reducida de la dinámica del sistema de interés mediante la representación de Kraus.

En el ámbito de las caminatas cuánticas, el estudio de la decoherencia posee un

interés fundamental que trasciende la simple caracterización del ruido experimental. Desde una perspectiva física, introducir operadores de decoherencia permite investigar de manera controlada el límite semiclásico del sistema. Específicamente, facilita el estudio de los mecanismos mediante los cuales la dinámica transiciona de una expansión balística a un transporte difusivo. El análisis de estos modelos teóricos de decoherencia, así como su impacto en la distribución de probabilidad y las métricas de cuanticidad, constituye el objeto central de estudio de este trabajo.

2. Presentación del problema

2.1. Modelos de decoherencia en caminatas cuánticas

Dentro del campo de caminatas cuánticas, la decoherencia es un tema de especial interés por los distintos fenómenos que nos permite explorar, desde estudiar la transición del comportamiento cuántico al clásico, como entender los efectos del entorno que afectan a las implementaciones experimentales, o su papel en el diseño y optimización de algoritmos. Como señala Kendon en la ref. [6], muchos de los primeros estudios en el campo de caminatas cuánticas se tomaban la molestia de verificar numéricamente que sus modelos específicos bajo ciertos tipos de decoherencia transicionaban a caminatas aleatorias. De hecho, demostrar la existencia de este límite clásico es una forma de justificar que la dinámica cuántica unitaria propuesta es una caminata cuántica legítima. El primer estudio sistemático sobre la decoherencia en este contexto fue realizado por Kendon y Sanders en la ref. [7]. Su trabajo se enfocó en el principio de la complementariedad¹, demostrando formalmente que, mediante el control de las mediciones, el sistema puede interpolar de manera continua entre una «onda de caminata» completamente coherente y una caminata aleatoria.

A diferencia de la visión convencional que asocia la decoherencia estrictamente con el ruido ambiental inevitable, en el ámbito de las caminatas cuánticas esta ha dejado de considerarse un simple error experimental indeseado. Por el contrario, se ha integrado de manera intencional en diversos modelos con el fin de afinar propiedades específicas del sistema (*e. g.* su tasa de dispersión [8]). En el caso de las caminatas cuánticas discretas en el tiempo, la decoherencia se implementa mediante el formalismo de canales cuánticos y el uso del operador de densidad, herramientas que permiten modelar la pérdida de coherencia en el espacio de la moneda, en el de

¹Principio que establece que los objetos cuánticos poseen propiedades exclusivas (*e. g.* onda y partícula) que no pueden medirse simultáneamente, pero que son necesarias en conjunto para una descripción física completa de los fenómenos cuánticos.

la posición o en ambos simultáneamente.

Uno de los primeros trabajos en demostrar la utilidad de la decoherencia en caminatas cuánticas fue el realizado por Kendon y Tregenna en la ref. [8]. En este trabajo mostraron que para valores de decoherencia suficientemente pequeños es posible potenciar los efectos de las caminatas cuánticas: particularmente, observaron una distribución muy cercana a la uniformidad, mayores tiempos de mezcla en ciclos y tiempos de llegada más confiables en un hipercubo. Si bien el presente trabajo se centra exclusivamente en el estudio de la transición a la clasicidad de nuestro modelo, es fundamental reconocer que la decoherencia ofrece diversas perspectivas de análisis más allá de la pérdida de coherencia cuántica.

2.2. Motivación física del canal de *fuzzy shift*

2.2.1. Implementación experimental

La implementación experimental que se usó de base para este proyecto es la presentada por Wang *et al.* en la ref. [21]. En este artículo, los autores diseñaron una caminata cuántica discreta en el tiempo en una dimensión en una plataforma fotónica, cuyo esquema se ilustra en la fig. 2.1. El experimento se divide en cuatro módulos principales, de los cuales solo el segundo módulo (*quantum walk module*) será de nuestro interés. En la primera sección de este módulo, *Polarizer1*², un fotón es preparado en el estado $|+_y\rangle = (|0\rangle + i|1\rangle)/\sqrt{2}$. A medida que el fotón avanza por el montaje, su estado se transforma en cada paso mediante la interacción con dos³ elementos físicos:

- La moneda, implementada mediante una HWP. Esta aplica una rotación en el espacio de polarización del fotón. Al orientar el eje óptico de la placa a un ángulo específico, se induce un desfase entre las componentes de la luz que transforma el estado de polarización, permitiendo preparar al fotón en una superposición de estados de la moneda. Matemáticamente, la moneda que se

²El *Polarizer1* está formado por 3 elementos: el PBS (*Polarization-dependent Beam Splitter*), que selecciona el estado de polarización que nos interesa; una HWP (*Half-Wave Plate*), que rota el vector de polarización para luz polarizada linealmente; y una QWP (*Quarter-Wave Plate*), que introduce una fase relativa entre ambos estados de polarización.

³En el trabajo realizado por Wang *et al.*, además de estos dos elementos físicos se muestra una *Phase gate*, formada por tres elementos: QWP, HWP, QWP. Esta sección se usa para implementar la decoherencia que ellos inducen en su experimento, mientras que en nuestra simulación eliminamos estos elementos por completo para estudiar otros efectos de decoherencia que se discutirán más adelante.

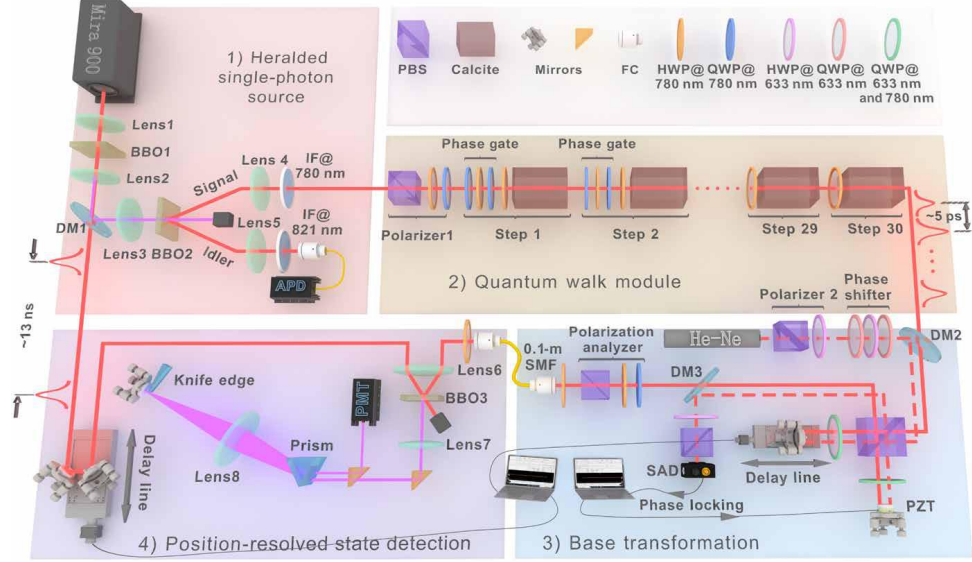


Figura 2.1. Configuración experimental en la que se basó el modelo de decoherencia. Tomada de la ref. [21].

implementó para este experimento fue

$$\hat{C} = \mathbb{1}_P \otimes e^{-i(\pi/6)\sigma_y}\sigma_z. \quad (2.1)$$

La HWP debió ser rotada un ángulo $\pi/12$ respecto a la horizontal para provocar una rotación en la polarización del fotón de $\alpha = \pi/6$, tal como se muestra en la ecuación.

- El operador de desplazamiento, implementado mediante un cristal de calcita birrefringente. Debido a la anisotropía del cristal, las componentes de polarización horizontal y vertical experimentan índices de refracción distintos y, por ende, velocidades de propagación diferentes. Esto genera un desfase temporal de aproximadamente 5 ps que mapea el estado de polarización al espacio de posiciones temporales, donde cada «paso» en la posición equivale a un retraso acumulado. Matemáticamente, el desplazamiento que se implementó para este experimento fue

$$\hat{S} = \sum_x (|x+1\rangle\langle x| \otimes |0\rangle\langle 0| + |x\rangle\langle x| \otimes |1\rangle\langle 1|). \quad (2.2)$$

2.2.2. Canal de decoherencia

Al transicionar de los modelos cuánticos ideales a sus respectivas implementaciones experimentales, surge la interrogante sobre qué componentes podrían introducir efectos de decoherencia. Basándonos en el modelo de Wang *et al.* [21] y su implementación, notamos que sería posible encontrar efectos de decoherencia si los cristales de calcita que implementan el operador de desplazamiento tuvieran imperfecciones que provoquen retrasos no deterministas en los tiempos de llegada de los fotones. En caso de que estos retrasos fuesen suficientemente grandes, podrían provocar que un fotón en el intervalo $|t\rangle$ se retrase hasta el intervalo siguiente, $|t+1\rangle$, afectando considerablemente la distribución de probabilidad resultante.

La relevancia de la decoherencia anteriormente descrita radica en el hecho de que, en la implementación de Wang *et al.* [21], el espacio de Hilbert correspondiente a la posición del caminante esté codificado en el tiempo de retraso de los fotones. Esta codificación introduce un desafío crítico: a medida que aumenta el número de pasos N y, conservando la duración total de la caminata, la estabilidad de la línea de retardo se vuelve más importante, pues errores pequeños en el retraso de las polarizaciones del fotón se vuelven más significativos en comparación con la duración total de la caminata. En resumen, la decoherencia propuesta será más significativa mientras más pasos se realicen en el mismo tiempo total de caminata.

Dado que utilizaremos el formalismo de canales cuánticos para incluir los efectos de la decoherencia, es necesario reformular la evolución de una caminata cuántica discreta en el tiempo (dada por la ec. (1.8)) en términos de la matriz de densidad. La evolución unitaria equivalente es:

$$\rho_t = SC\rho_{t-1}C^\dagger S^\dagger = U\rho_{t-1}U^\dagger, \quad (2.3)$$

donde $\rho_{t-1} = |\psi_{t-1}\rangle\langle\psi_{t-1}|$ representa el estado del sistema en el paso temporal anterior. Esta formulación tiene la ventaja de ser más general y permitirnos describir no solo estados puros, sino también estados mixtos que surgen cuando se quieren modelar imperfecciones en el proceso. En este trabajo, los operadores de la moneda y de desplazamiento estarán dados por las ecs. (2.1) y (2.2), respectivamente.

El operador que modela la decoherencia que estudiaremos está dado por

$$F = \left(\sum_x |x+1\rangle\langle x| \right) \otimes \mathbb{1}, \quad (2.4)$$

y lo nombraremos como *fuzzy shift* porque desplaza todos los estados de la posición en

una unidad, transformando $|i\rangle \rightarrow |i+1\rangle$. Dependiendo de la probabilidad con la que ocurra el retraso del fotón, este operador alterará las interferencias que tendría una caminata cuántica. La evolución de la caminata cuántica, considerando los efectos de decoherencia introducidos por el operador de *fuzzy shift*, está dada por el siguiente canal cuántico:

$$\rho_t = (1-p)\hat{U}\rho_{t-1}\hat{U}^\dagger + pF\hat{U}\rho_{t-1}\hat{U}^\dagger F^\dagger, \quad (2.5)$$

donde el sistema evoluciona unitariamente mediante el operador U con probabilidad $(1-p)$, mientras que, con probabilidad p se aplica, además de la evolución unitaria U , la operación de *fuzzy shift* F .

En este trabajo nos centramos en estudiar cómo la decoherencia modelada por el canal de *fuzzy shift* [ec. (2.5)] puede afectar las propiedades cuánticas (cuanticidad) del modelo ideal propuesto por Wang *et al* [21]. Específicamente, buscamos verificar si el canal retorna la caminata cuántica a su límite clásico como caminata aleatoria.

3. Resultados

En este capítulo nos enfocamos en estudiar la dinámica de las caminatas cuánticas bajo el efecto de la decoherencia modelada por el canal de *fuzzy shift*. Para ello, en la sección 3.1 analizamos primero el comportamiento del modelo de caminata cuántica utilizado a lo largo de este trabajo [presentado en la ec. (2.3)] bajo efectos de decoherencia con límites clásicos reconocidos. Posteriormente, en la sección 3.2 analizamos el canal de *fuzzy shift* para el estado inicial $\rho_0 = |0, +_y\rangle \langle 0, +_y|$, evaluando su cuanticidad a través de la evolución temporal de la desviación estándar, las coherencias en la matriz de densidad reducida de la posición y la pureza del estado, para determinar si este modelo también reproduce el comportamiento de una caminata aleatoria, empleando los modelos de la sección anterior como punto de comparación. Finalmente, para asegurar que los resultados obtenidos en la sección anterior se mantienen sin importar el estado inicial, en la sección 3.3 examinamos el comportamiento del canal de *fuzzy shift* bajo distintos estados iniciales.

3.1. Clasicidad en canales de *phase flip* y proyecciones

Existen canales de decoherencia que, bajo ciertos regímenes, llevan a una caminata cuántica al comportamiento clásico. Este fenómeno se observa mediante el análisis de la transición de la distribución de probabilidad, la cual pasa de un régimen de expansión balístico a uno difusivo. En esta sección abordaremos dos modelos distintos con ruido en el sistema: decoherencia en el espacio de la moneda y decoherencia con proyectores en el espacio total de la caminata. Estos modelos fueron escogidos porque muestran una transición de comportamiento cuántico al clásico, por lo que nos servirán de comparación con el modelo de *fuzzy shift* que vamos a estudiar.

El primero de los modelos de ruido seleccionados fue el canal cuántico que introduce decoherencia en el espacio de la moneda. Este canal ya ha sido estudiado

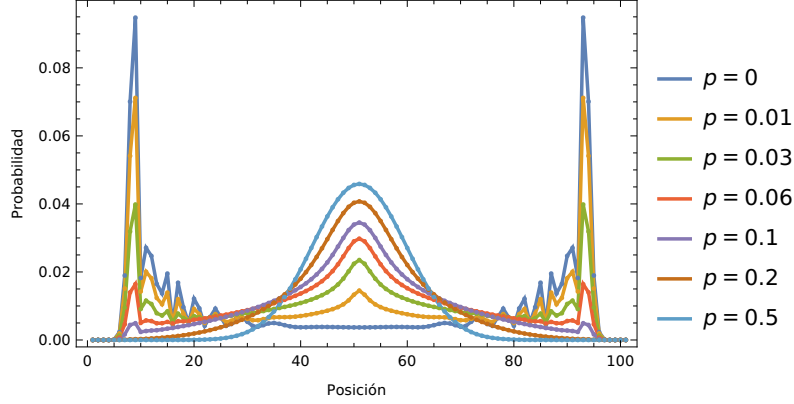


Figura 3.1. Distribución de probabilidad para caminatas cuánticas con decoherencia en el espacio de la moneda modelada por el canal de *phase-flip* [cf. ec. (3.1)]. Se muestran los resultados para $t_f = 100$ pasos de evolución temporal, con distintas probabilidades de decoherencia p , partiendo en todos los casos del estado inicial $\rho = |0, +_y\rangle\langle 0, +_y|$.

anteriormente en la literatura (por ejemplo en la ref. [4]) y fue reproducido para este trabajo. Está dado por:

$$\rho_t = (1 - p) U \rho_{t-1} U^\dagger + p (\mathbb{1} \otimes \sigma_z) U \rho_{t-1} U^\dagger (\mathbb{1} \otimes \sigma_z), \quad (3.1)$$

donde σ_z es el operador de Pauli z . Con probabilidad $1 - p$ el sistema evoluciona sin decoherencia y con probabilidad p se destruye progresivamente la coherencia entre los estados de la base computacional de la moneda. Como se aprecia en la fig. 3.1, conforme $p \rightarrow 0.5$ la interferencia desaparece y la distribución de probabilidad tiende a la distribución binomial que caracteriza a las caminatas aleatorias. Solo se presentan las distribuciones de probabilidad para el intervalo $p \in [0, 0.5]$ debido a que el comportamiento del canal cuántico en la ec. (3.1) es simétrico en el resto del rango. A partir de $p = 0.5$, los resultados son análogos a los obtenidos anteriormente, diferenciándose únicamente por una reflexión espacial provocada por el canal de *phase flip*. En la esfera de Bloch, este canal actúa reduciendo el volumen de la esfera hacia el eje z : cuando no hay ruido $p = 0$, la esfera permanece intacta; en el punto de máxima interferencia $p = 0.5$, la esfera se comprime hasta convertirse en una línea recta, eliminando las fases en la base computacional. Al llegar a $p = 1$, el sistema recupera su forma original, pero con una rotación que invierte las fases. Para la caminata cuántica, esto significa que el sistema comienza con un comportamiento puramente cuántico en $p = 0$, transiciona hacia un movimiento de tipo clásico en $p = 0.5$ y vuelve a recuperar sus propiedades cuánticas en $p = 1$, comportándose como un reflejo del estado inicial.

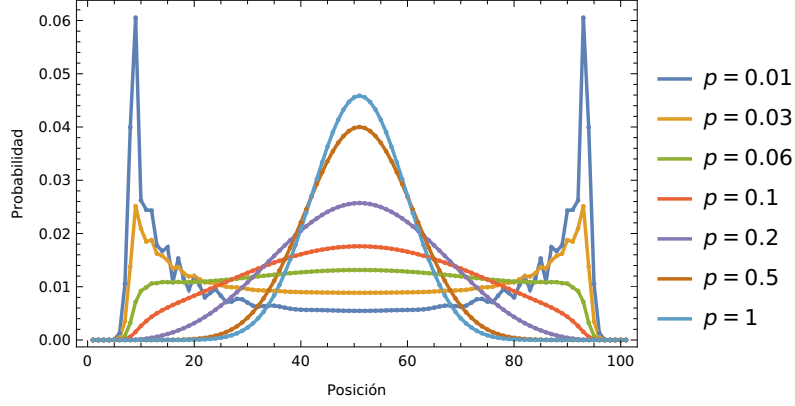


Figura 3.2. Distribución de probabilidad para caminatas cuánticas con decoherencia modelada por el canal de proyecciones [cf. ec. (3.2)]. Se muestran los resultados para $t_f = 100$ pasos de evolución temporal, con distintas probabilidades de decoherencia p , partiendo en todos los casos del estado inicial $\rho = |0, +_y\rangle\langle 0, +_y|$.

El segundo de los modelos con ruido simulados fue el canal cuántico que implementa decoherencia borrando las coherencias del espacio conjunto. Este canal ya ha sido estudiado anteriormente en la ref. [8] y fue reproducido para este trabajo. Está dado por:

$$\rho_t = (1 - p) U \rho_{t-1} U^\dagger + p \sum_{c=0}^1 \sum_{x=0}^\infty P_{x,c} U \rho_{t-1} U^\dagger P_{x,c}^\dagger, \quad (3.2)$$

donde los operadores $P_{x,c} = |x, c\rangle\langle x, c|$ son proyectores sobre la base computacional del sistema completo. Con probabilidad $1 - p$ el sistema evoluciona sin decoherencia y con probabilidad p el sistema es proyectado a una posición y moneda definida, eliminando los elementos fuera de la diagonal de la matriz de densidad. Este proceso suprime las superposiciones, forzando al sistema a comportarse como una partícula clásica que sigue una trayectoria difusiva, tal como se muestra en la fig. 3.2 para distintos valores de p .

3.2. Clasicidad en el canal *fuzzy shift*

Una vez constatado que la decoherencia en el espacio de la moneda y la decoherencia de proyecciones en los estados de la caminata recuperan el comportamiento de una caminata aleatoria clásica, surge la pregunta de si este será también el caso para el canal de *fuzzy shift* [ec. 2.5]. Para estudiar si esta dinámica reproduce la distribución de probabilidad propia de las caminatas aleatorias, examinamos la

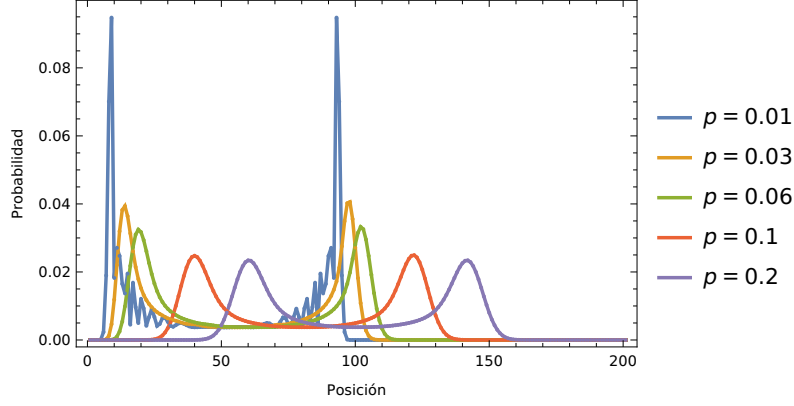


Figura 3.3. Distribución de probabilidad para caminatas cuánticas discretas en el tiempo con decoherencia modelada por el canal de *fuzzy shift* [cf. ec. (2.5)]. Se muestran los resultados para $t_f = 100$ pasos de evolución temporal, con distintas probabilidades de decoherencia p , partiendo en todos los casos del estado inicial $\rho = |0, +_y\rangle\langle 0, +_y|$.

distribución de probabilidad de la posición para diferentes valores de decoherencia p .

Lo primero que se aprecia en las gráficas de la fig. 3.3 es que la dimensión del espacio de Hilbert de la posición mínima para representar una caminata de t pasos con decoherencia modelada por el canal de *fuzzy shift* se duplica respecto al de una caminata cuántica sin este canal, cuando la condición inicial está totalmente localizada. Además, al aumentar p , la distribución de probabilidad se desplaza y las interferencias se suavizan. Para este canal, las distribuciones de probabilidad asociadas a los valores de $p \in [0, 0.5]$ son iguales a las correspondientes distribuciones de probabilidad asociadas a valores de p en el intervalo $[0.5, 1]$ en orden descendente, pero desplazadas en la posición. Ya que este comportamiento es similar al mostrado por el canal de *phase-flip* sería razonable buscar, de manera inicial, el límite clásico en $p = 0.5$.

Tras una inspección rápida de las distribuciones de probabilidad de la fig. 3.3, observamos que no se recupera la distribución binomial de las caminatas aleatorias. Esto hace que nos preguntemos si la decoherencia modelada por el canal de *fuzzy shift* tiene un límite clásico al igual que el mostrado por los canales de *phase flip* o de proyecciones. En las siguientes subsecciones utilizaremos diferentes métodos para explorar las propiedades de la caminata, buscando responder a la pregunta anterior.

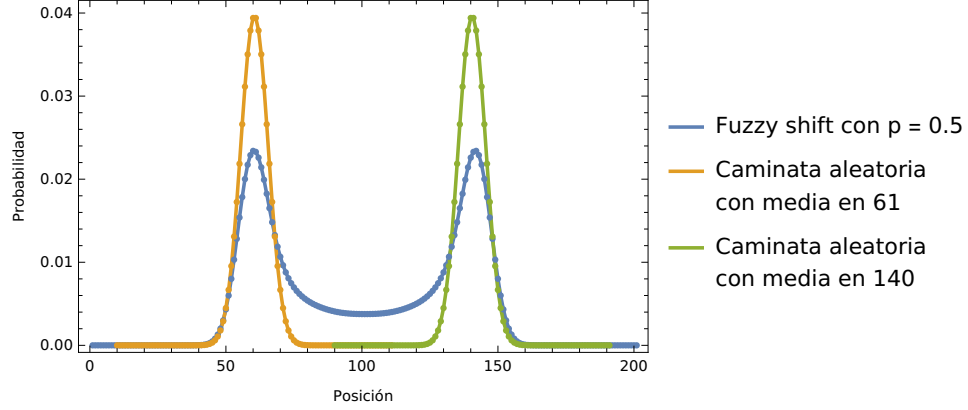


Figura 3.4. Comparación de la distribución de probabilidad de una DTQW sujeta a decoherencia frente a caminatas aleatorias con posición inicial desplazada. La curva azul representa la evolución de 100 pasos de una caminata cuántica con decoherencia dada por el canal de *fuzzy shift* [ec. (2.5)], con probabilidad de decoherencia $p = 0.5$ y estado inicial $\rho = |0, +_y\rangle\langle 0, +_y|$. Las curvas amarilla y verde muestran las distribuciones de dos caminatas aleatorias independientes cuyas posiciones iniciales son 61 y 140, respectivamente. Se observa que, si bien esta caminata cuántica presenta dos picos alineados con los picos de las caminatas aleatorias, la probabilidad es mayor en la región central y menor en los picos en comparación con el comportamiento clásico.

3.2.1. Caminata decoherente como superposición de caminatas aleatorias

Para explicar la distribución de probabilidad del canal de *fuzzy shift* de la fig. 3.4, planteamos la hipótesis de que la dinámica bajo la decoherencia modelada por este canal fuera análoga a dos caminantes clásicos independientes evolucionando en la misma línea. Para evaluar esta similitud, se intentó caracterizar dicho límite mediante el ajuste de la distribución observada a una suma normalizada de dos distribuciones binomiales, como se muestra en la fig. 3.4. Sin embargo, esta hipótesis fue descartada al contrastar los resultados: si bien existe una coincidencia en la posición de los picos principales, la probabilidad de la distribución cuántica en las regiones de los picos es mucho menor a la de la suma de las distribuciones clásicas; mientras que para la región central ocurre lo contrario.

3.2.2. Verificación de clasicidad empleando la desviación estándar

En el capítulo 1 vimos que las distribuciones de probabilidad para los diferentes tipos de caminatas se caracterizan por el comportamiento de su desviación estándar σ :

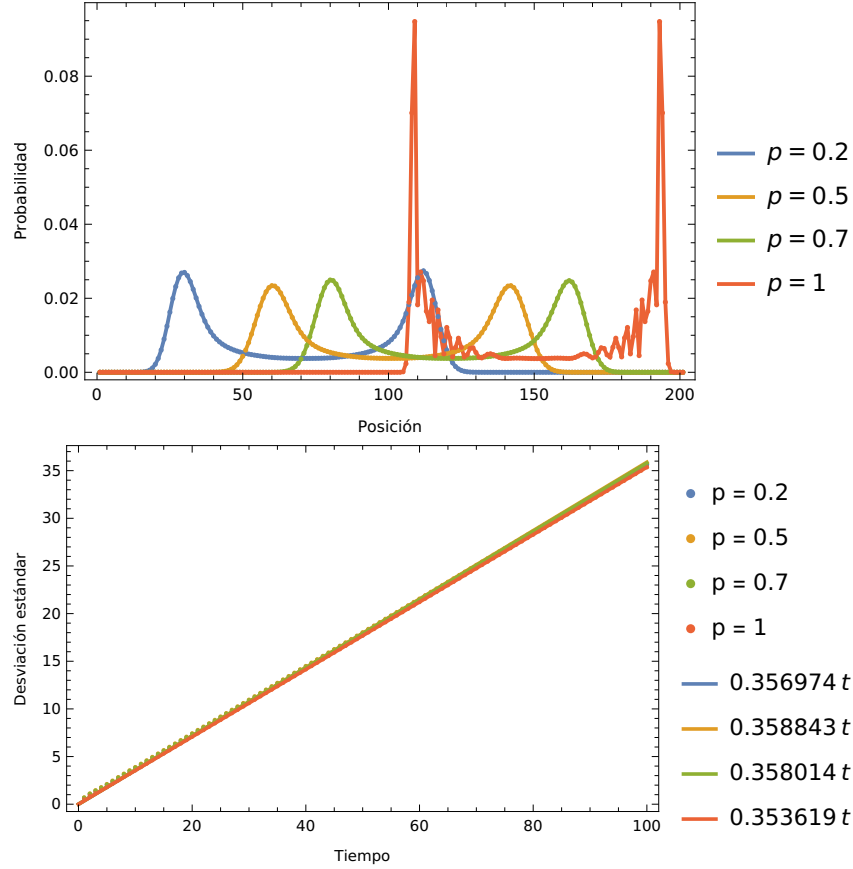


Figura 3.5. En el panel superior se muestran las distribuciones de probabilidad de caminatas cuánticas con decoherencia modelada por el canal de *fuzzy shift* [ec. (2.5)] con estado inicial $\rho = |0, +_y\rangle\langle 0, +_y|$ y $t_f = 100$ pasos de evolución temporal, para distintas probabilidades p . En el panel inferior se muestra la gráfica de la desviación estándar en función del tiempo para cada valor de p anterior.

mientras que las caminatas aleatorias presentan una desviación estándar proporcional a la raíz cuadrada del tiempo ($\sigma \propto \sqrt{t}$), en las caminatas cuánticas esta relación es lineal ($\sigma \propto t$), denotando un transporte balístico. Considerando lo anterior, se calculó la desviación estándar de la distribución de probabilidad para cada paso de caminatas cuánticas con distintos valores de decoherencia p . Posteriormente, se comparó el ajuste de las desviaciones estándar con las curvas At (cuántico) y $A\sqrt{t}$ (clásico) y se graficó el ajuste con mayor coeficiente de determinación (R^2). Esto se puede ver en el panel inferior de la fig. 3.5, en donde observamos que el mejor ajuste es el lineal (régimen cuántico) para todos los valores de p mostrados.

Los resultados de la fig. 3.5 muestran la ausencia de una transición al régimen clásico. Independientemente del valor de p , la desviación estándar mantiene un crecimiento lineal, sin adoptar un comportamiento de raíz cuadrada. Esto sugiere

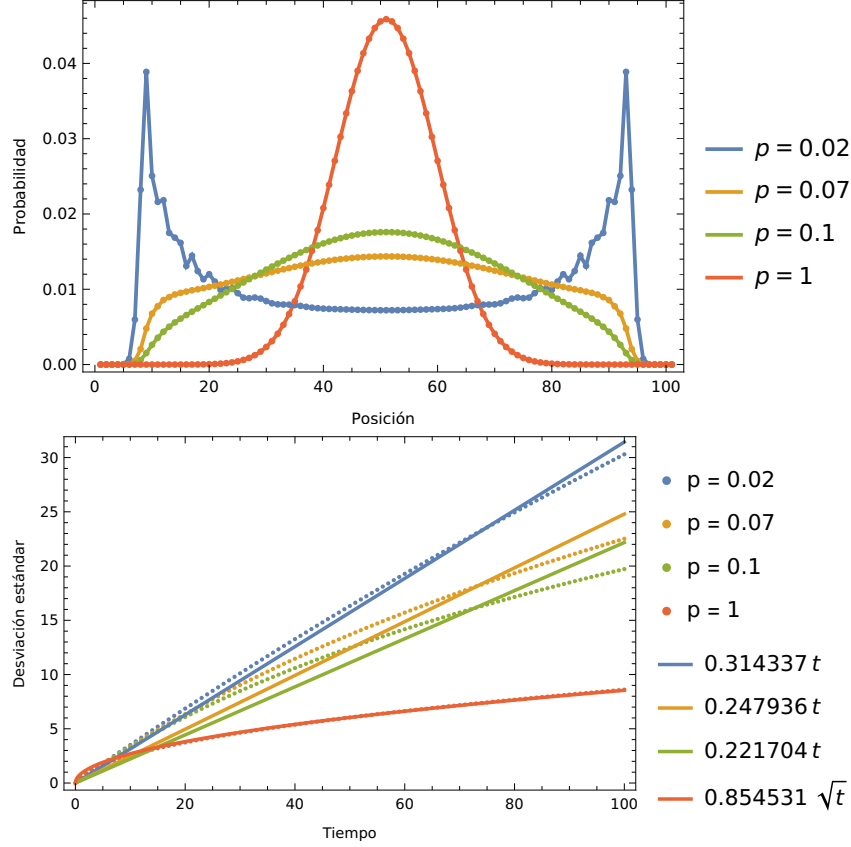


Figura 3.6. En el panel superior se muestran las distribuciones de probabilidad de caminatas cuánticas con decoherencia modelada por el canal de proyecciones [ec. (3.2)] con estado inicial $\rho = |0, +_y\rangle\langle 0, +_y|$ y $t_f = 100$ pasos de evolución temporal, para distintas probabilidades p . En el panel inferior se muestra la gráfica de la desviación estándar en función del tiempo para cada valor de p anterior.

que, a diferencia de otros modelos de ruido, el canal de *fuzzy shift* preserva el carácter balístico de la propagación. En contraste, para el canal de proyecciones [ec. (3.2)] se observa una transición paulatina de la dinámica lineal a la de raíz cuadrada conforme aumenta la decoherencia, tal como se evidencia en el panel inferior de la fig. 3.6.

Para asegurarnos de que el comportamiento mostrado por las figs. 3.5 y 3.6 se mantiene para valores intermedios de p se realizó la fig. 3.7. Para realizar esta gráfica se sigue este procedimiento: 1) se fija un valor para la probabilidad de decoherencia $0 \leq p \leq 1$; 2) se calculan las distribuciones de probabilidad de una caminata cuántica con el canal escogido (*fuzzy shift* o canal de proyecciones), para distintos tiempos desde $t = 1$ hasta $t = 100$; 3) se calcula la desviación estándar para cada una de las distribuciones anteriores; 4) se toma la desviación estándar en función de t y se le realiza un ajuste lineal y uno de raíz cuadrada; 5) se grafica el R^2 de cada uno de los ajustes; 6) todo el procedimiento anterior se repite para todos los valores de p . El

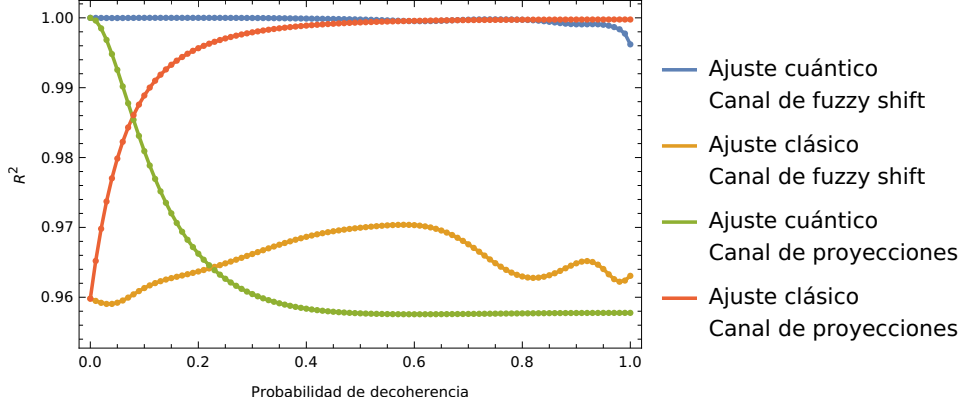


Figura 3.7. Coeficiente de determinación R^2 en función de la probabilidad p de que ocurra decoherencia modelada por el canal de *fuzzy shift* [ec. (2.5)] (líneas azul y amarilla) y por el canal de proyecciones [ec. (3.2)] (líneas verde y roja), para una caminata cuántica con estado inicial $\rho = |0, +_y\rangle\langle 0, +_y|$ y $t_f = 100$ pasos de evolución. La línea azul representa qué tan bien ajusta el comportamiento de las caminatas al régimen cuántico ($\sigma \propto t$), mientras que la línea amarilla representa qué tan bien ajusta el comportamiento de las caminatas al régimen clásico ($\sigma \propto \sqrt{t}$). Se observa que para el canal de *fuzzy shift* hay un mejor ajuste con el comportamiento cuántico para todos los valores de p , mientras que para el canal de proyecciones hay una transición entre el comportamiento cuántico y clásico.

valor del R^2 más grande para un valor de p específico permite conocer cuál función (lineal o raíz cuadrada) se ajusta mejor a la función de la desviación estándar en el tiempo, lo que da intuición acerca de si su comportamiento es más similar al de una caminata cuántica o clásica para dicho valor de p . Esta gráfica también nos muestra en qué valor de la probabilidad de decoherencia se encuentra la transición entre un comportamiento al otro.

Si observamos la fig. 3.7 hay una gran diferencia en el comportamiento de cada uno de los canales. Mientras que el canal de proyecciones muestra un intercambio claro en los comportamientos cuántico y clásico, el canal de *fuzzy shift* es completamente dominado por el comportamiento cuántico. Este resultado parece ya apuntar a la ausencia de un límite clásico para el canal de *fuzzy shift*.

3.2.3. Coherencias en la matriz de densidad reducida de la posición

La matriz de densidad de un sistema cuántico está dividida en dos partes que representan conceptos físicos distintos: los elementos de la diagonal y los de fuera de la diagonal. Los primeros representan las probabilidades clásicas de encontrar al sistema en un estado en específico de los estados de la base al medir; mientras

que los elementos fuera de la diagonal (llamados coherencias) representan la relación de fase cuántica entre los estados de la base: si estos términos son distintos de cero, el sistema se encuentra en una superposición cuántica coherente de los estados de la base, en lugar de ser simplemente una mezcla estadística de los mismos. En este caso nos interesa únicamente saber qué le ocurre a las coherencias empleando la representación matricial en la base computacional de la caminata. Esto se debe a la dinámica de la caminata: el operador de desplazamiento (tal como fue definido) actúa en función de los estados de esta base.

En esta sección observaremos las coherencias de la matriz de densidad representada en la base computacional para observar su cuanticidad: mientras menor sea su magnitud, menor será el carácter cuántico de la caminata. En el límite del comportamiento totalmente clásico, la matriz de densidad será diagonal, representando una distribución de probabilidad clásica, sin superposiciones, ni interferencia. Para cuantificar la coherencia de las caminatas bajo el efecto del canal de *fuzzy shift* emplearemos la norma l_1 de la coherencia, la cual está definida como la suma de los valores absolutos de todos los elementos fuera de la diagonal de una matriz de densidad representada en la base computacional de la caminata [1]:

$$C_{l_1}(\rho) = \sum_{i \neq j} |\rho_{i,j}|. \quad (3.3)$$

El valor de C_{l_1} es un número real, no negativo en el intervalo $[0, d - 1]$ (con d la dimensión del espacio de Hilbert del sistema), donde $C_{l_1} = 0$ significa que no hay ninguna coherencia y $C_{l_1} = d - 1$ significa que el estado es el máximamente coherente. A fin de comparar valores de la norma l_1 de coherencia con espacios de diferente tamaño, tomaremos su valor normalizado:

$$\tilde{C}_{l_1}(\rho) = \frac{C_{l_1}}{d - 1}. \quad (3.4)$$

En la fig. 3.8 se muestra la matriz de densidad de una caminata cuántica sin decoherencia y en ella las coherencias son muy notorias y forman un cuadrado en la primera mitad de la diagonal. El cálculo de la norma l_1 de la coherencia normalizada para este escenario es aproximadamente $\tilde{C}_{l_1} = 0.569649$. Por otro lado, en la fig. 3.9 se muestra la matriz de densidad de una caminata cuántica con decoherencia modelada por el canal de *fuzzy shift* [ec. (2.5)] y se observa que en ella las coherencias disminuyen y se concentran mayormente alrededor de la diagonal. El cálculo de la norma l_1 de la coherencia normalizada para este escenario es aproximadamente $\tilde{C}_{l_1} = 0.0944586$. Si

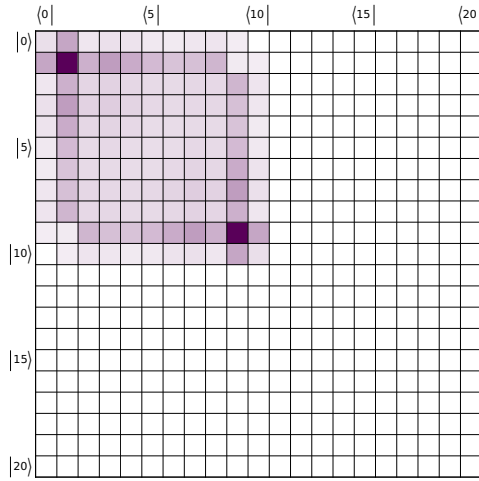


Figura 3.8. Matriz de densidad reducida de la posición de una caminata cuántica sin decoherencia [modelada por la ec. (2.3)], con estado inicial $\rho_0 = |0, +_y\rangle\langle 0, +_y|$ y $t_f = 10$ pasos de evolución temporal.

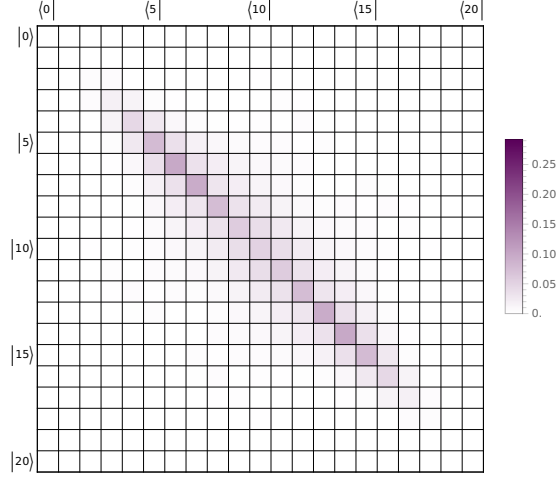


Figura 3.9. Matriz de densidad reducida de la posición de una caminata con probabilidad $p = 0.5$ de que ocurra decoherencia modelada por el canal de *fuzzy shift* [ec. (2.5)] con estado inicial $\rho_0 = |0, +_y\rangle\langle 0, +_y|$ y $t_f = 10$ pasos de evolución temporal.

bien la matriz de la fig. 3.9 no es diagonal, las normas l_1 de coherencia normalizadas evidencian la reducción de las coherencias a causa del canal de *fuzzy shift*.

Para averiguar si aumentando la cantidad de pasos las coherencias disminuyen, se calculó la norma l_1 de coherencia normalizada de la misma caminata cuántica que en la fig. 3.9, pero aumentando la cantidad de pasos de 10 a 100, como se puede ver en la fig. 3.10. El valor obtenido numéricamente fue $\tilde{C}_{l_1} = 0.0313267$, y es menor al obtenido para 10 pasos. Al ajustar la escala en la fig. 3.10 imponiendo un límite superior al gradiente de colores¹ (fig. 3.11) se observa la presencia de «ondas» de coherencias que se propagan sobre la «antidiagonal»². La persistencia de estas estructuras que se propagan en el tiempo nos hace sospechar que, a pesar de la decoherencia introducida por el canal, el sistema retiene características cuánticas y no colapsa a una dinámica clásica.

Graficando la norma l_1 de coherencia normalizada en el tiempo (fig. 3.12) podemos ver que $\tilde{C}_{l_1}$ se estabiliza con el pasar del tiempo, aunque al inicio decaiga rápidamente, a mayor tiempo disminuye su razón de cambio. Esto confirma nuestra suposición sobre la prevalencia de la cuanticidad de la dinámica a tiempos largos.

¹Se saturan los valores altos y se restringe el gradiente de color únicamente al 3.125 % de los datos con menor magnitud

²Perpendicular a la diagonal que pasa por el punto medio de la misma.

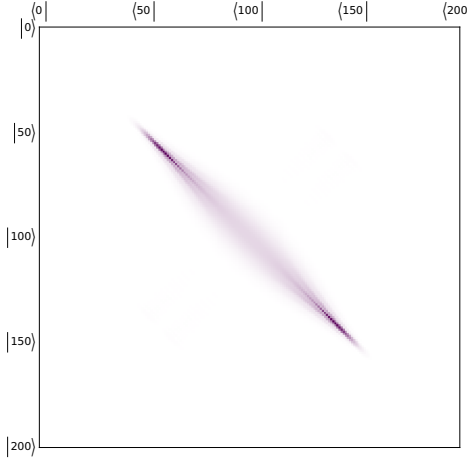


Figura 3.10. Matriz de densidad reducida de la posición de una caminata cuántica con probabilidad $p = 0.5$ de que ocurra decoherencia modelada por el canal de *fuzzy shift* [ec. (2.5)], con estado inicial $\rho = |0, +_y\rangle\langle 0, +_y|$ y $t_f = 100$ pasos de evolución temporal.

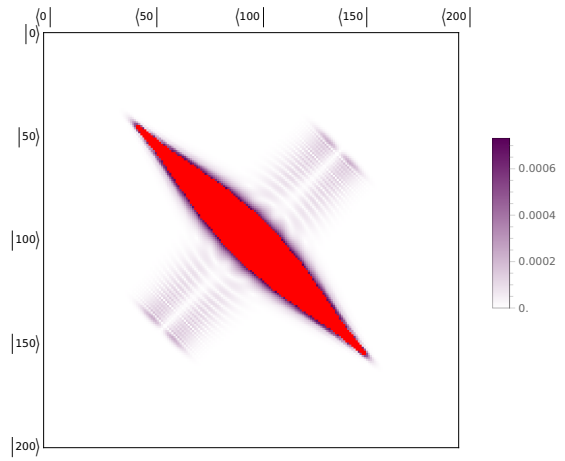


Figura 3.11. Ajuste a la escala del gradiente de color de la fig. 3.10 para resaltar elementos con menor magnitud relativa en la matriz de densidad. El 3.125 % de los valores más pequeños es coloreado en la escala morada y el resto es de color rojo.

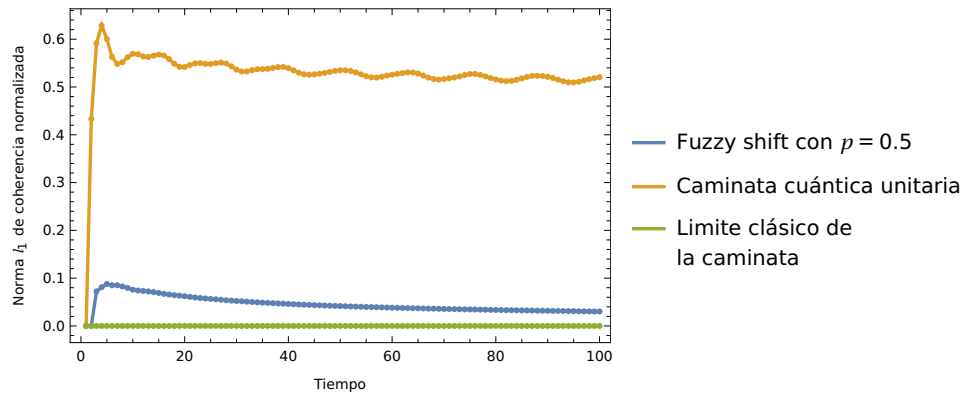


Figura 3.12. Norma l_1 de coherencia normalizada en función del tiempo. Se muestran $t_f = 100$ pasos de evolución para tres dinámicas distintas: una caminata cuántica con probabilidad $p = 0.5$ de que ocurra decoherencia modelada por el canal de *fuzzy shift* [ec. (2.5)]; una caminata cuántica sin decoherencia [ec. (2.3)]; y el límite clásico del canal de proyecciones [ec. (3.2)]. En todos los casos se empleó el estado inicial $\rho_0 = |0, +_y\rangle\langle 0, +_y|$.

3.2.4. Evaluando cuantidad mediante la pureza

Hasta ahora toda la evidencia apunta a que el proceso de decoherencia modelado por el canal de *fuzzy shift* [ec. (2.5)] no tiene ningún límite en el cual regrese el comportamiento clásico. Esto puede hacernos dudar de que la ec. (2.5) modele verdaderamente un proceso de decoherencia. Aunque es bastante evidente que el canal de *fuzzy shift* no puede ser escrito como una única evolución unitaria, para descartar cualquier duda podemos utilizar la pureza:

$$\gamma = \text{Tr}[\rho^2]. \quad (3.5)$$

Graficando la evolución de la pureza en el tiempo es posible asegurar que el proceso es decoherente, siempre y cuando la pureza vaya tendiendo a un valor cada vez menor. Tal como se puede ver en la fig. 3.13, donde tanto para la matriz de densidad completa como para la matriz de densidad reducida de la posición, la función $\gamma(t)$ asociada a la caminata decoherente con el canal de *fuzzy shift* se encuentra más cerca de tender al límite inferior (estado máximamente mixto) que al comportamiento de una caminata cuántica unitaria. Además, la función de la pureza en el tiempo de la caminata con decoherencia modelada por el canal de *fuzzy shift* tiene un comportamiento mucho más parecido al de la función para el límite clásico del canal de proyecciones, comparado con el comportamiento de la función de la pureza para la caminata cuántica unitaria. Esto nos asegura que el canal verdaderamente modela decoherencia y, a pesar de eso, nada parece indicar que vaya a haber un regreso al comportamiento clásico.

3.3. Distintos estados iniciales de la moneda

Tras haber caracterizado la dinámica del canal de *fuzzy shift* bajo un estado inicial específico, resulta fundamental determinar si la ausencia de un límite clásico es una propiedad intrínseca del canal o si, por el contrario, depende de la preparación inicial del sistema. Para evaluar la generalidad de las conclusiones obtenidas, se extendió el estudio a una muestra representativa de estados en el espacio de la moneda, usando los distintos estados de las eigenbases de los operadores de Pauli que son los estados $|0\rangle$, $|1\rangle$, $|+\rangle$, $|-\rangle$, $|+_y\rangle$ y $|-_y\rangle$ (ver en la fig. 3.14). Esta selección constituye una muestra significativa, ya que estos estados forman las tres bases mutuamente imparciales (*MUBs* por sus siglas en inglés) del espacio. Geométricamente, se distribuyen de forma simétrica por toda la superficie de la esfera de Bloch.

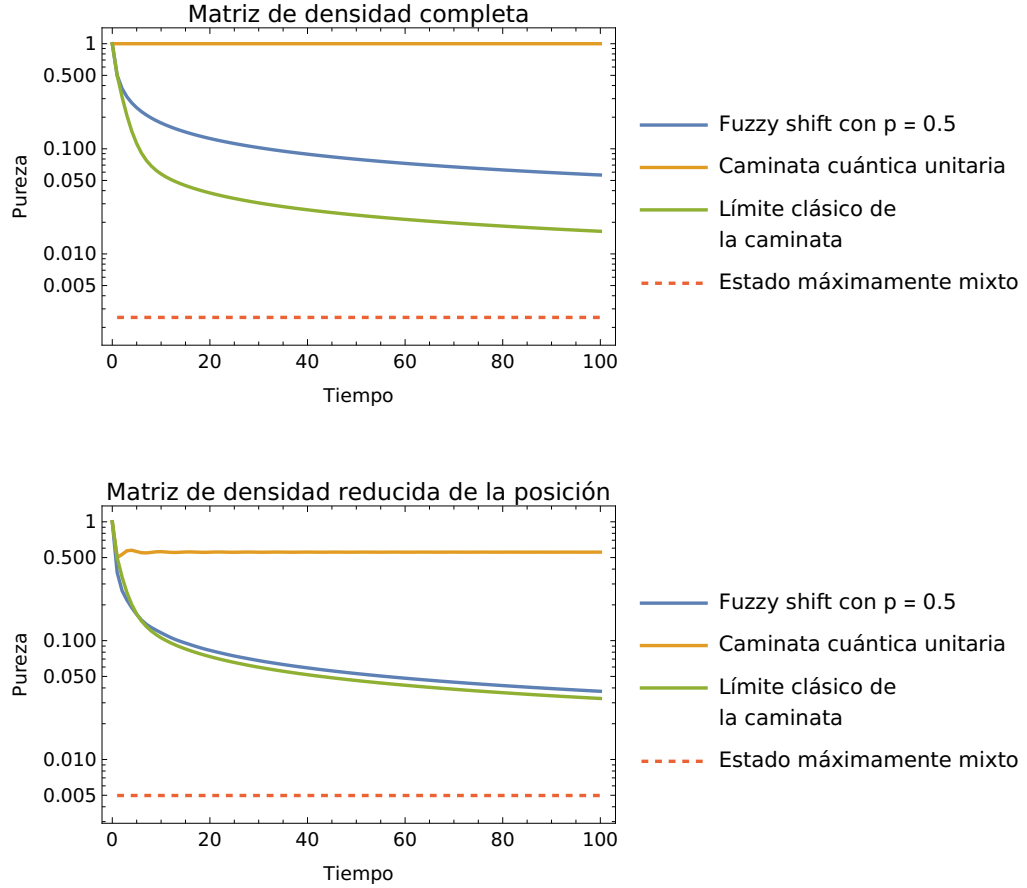


Figura 3.13. Evolución temporal de la pureza γ de la matriz de densidad del sistema total (panel superior) y de la matriz de densidad reducida de la posición (panel inferior). Se muestran $t_f = 100$ pasos de evolución para tres dinámicas distintas: una caminata cuántica con probabilidad $p = 0.5$ de que ocurra decoherencia modelada por el canal de *fuzzy shift* [ec. (2.5)]; una caminata cuántica sin decoherencia [ec. (2.3)]; y el límite clásico del canal de proyecciones [ec. (3.2)]. En todos los casos se empleó el estado inicial $\rho_0 = |0, +_y\rangle\langle 0, +_y|$.

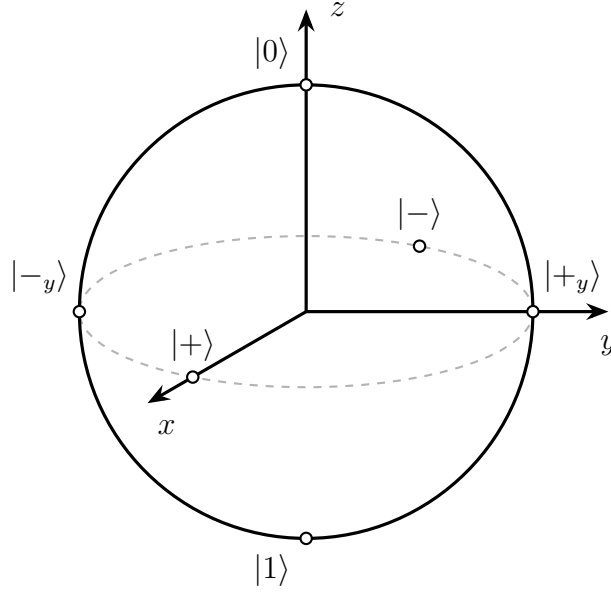


Figura 3.14. Representación en la esfera de Bloch de los estados $|0\rangle$, $|1\rangle$, $|+\rangle$, $|-\rangle$, $|+_y\rangle$ y $|-_y\rangle$.

Matemáticamente, el cuadrado del producto interno entre dos estados cualesquiera de bases diferentes es exactamente $1/2$, lo que significa que ninguna base presenta un solapamiento preferencial con otra. Al evaluar este conjunto distribuido uniformemente, evitamos que nuestra muestra se agrupe en una región específica del espacio de Hilbert, reduciendo así la posibilidad de sesgo que podría surgir al seleccionar estados iniciales «privilegiados».

Para evaluar la cuanticidad de las caminatas cuánticas con distintos estados iniciales vamos a repetir la prueba de la desviación estándar de la distribución de probabilidad usando el canal decoherente y lo compararemos con las distribuciones sin decoherencia. La elección de estado inicial afecta significativamente a la distribución de probabilidad cuántica de la caminata; sin embargo, la acción de la decoherencia en la distribución de probabilidad es cualitativamente la misma para todos los estados iniciales: las interferencias desaparecen y la curva se «suaviza», pero se conserva un esbozo de los picos principales de la distribución. Todo lo anterior ocurre sin cambiar el comportamiento balístico de distribución de la caminata.

En la fig. 3.15 se comparan las distribuciones de probabilidad de una caminata cuántica unitaria y otra con decoherencia, empleando los eigenvectores de σ_z como estados iniciales de la moneda. Podemos observar que la distribución de probabilidad de la caminata unitaria presenta varias irregularidades, siendo la mayoría de estas producto de la interferencia cuántica de la caminata, mientras que las últimas

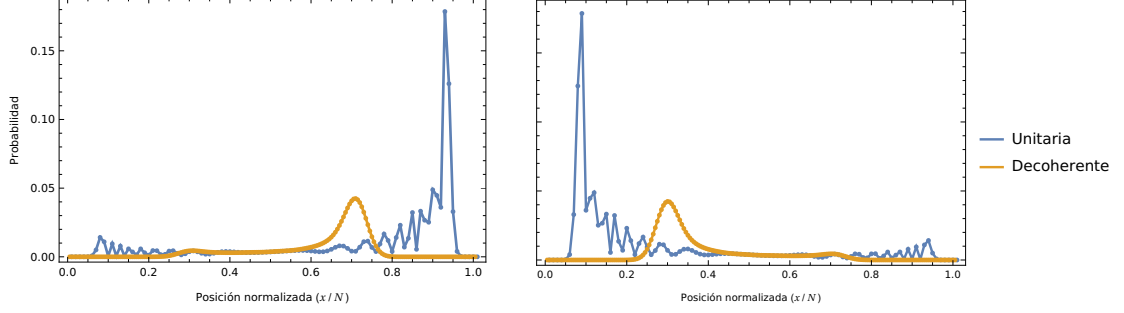


Figura 3.15. Comparación de distribuciones de probabilidad entre una caminata cuántica sin decoherencia [ec. (2.3)] y una caminata cuántica con probabilidad $p = 0.5$ de que ocurra decoherencia modelada por el canal de *fuzzy shift* [ec. (2.5)]. En el panel de la izquierda se emplea el estado inicial $\rho = |0, 0\rangle\langle 0, 0|$ para ambas dinámicas, mientras que en el panel derecho se emplea el estado inicial $\rho = |0, 1\rangle\langle 0, 1|$. Todos los resultados corresponden a $t_f = 100$ pasos de evolución temporal.

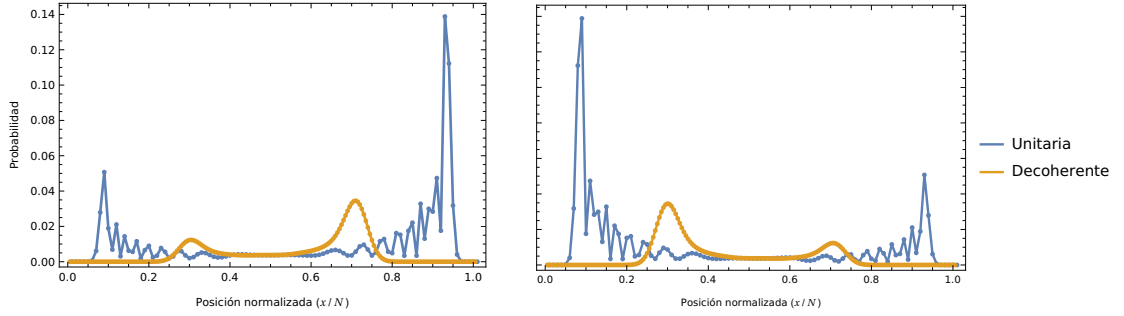


Figura 3.16. Comparación de distribuciones de probabilidad entre una caminata cuántica sin decoherencia [ec. (2.3)] y una caminata cuántica con probabilidad $p = 0.5$ de que ocurra decoherencia modelada por el canal de *fuzzy shift* [ec. (2.5)]. En el panel de la izquierda se emplea el estado inicial $\rho = |0, +x\rangle\langle 0, +x|$ para ambas dinámicas, mientras que en el panel derecho se emplea el estado inicial $\rho = |0, -x\rangle\langle 0, -x|$. Todos los resultados corresponden a $t_f = 100$ pasos de evolución temporal.

irregularidades apreciables en ambos extremos son los «picos» de la distribución. Por otro lado, para la distribución decoherente, el canal de *fuzzy shift* borra las interferencias y conserva los picos, desplazándolos hacia el centro de la distribución (este efecto será más evidente en las figuras posteriores).

En las figs. 3.16 y 3.17 se muestran las distribuciones de probabilidad de las mismas dinámicas de la figura anterior (fig. 3.15); pero empleando los eigenvectores de σ_x y σ_y , respectivamente. La forma de todas las distribuciones es similar, cambiando principalmente la diferencia de altura que hay entre los picos de las distribuciones; mientras que el resto de las cualidades mencionadas anteriormente se mantienen.

El resultado más importante de esta sección se puede observar en la fig. 3.18, en la cual graficamos la desviación estándar en función del tiempo para las distribuciones

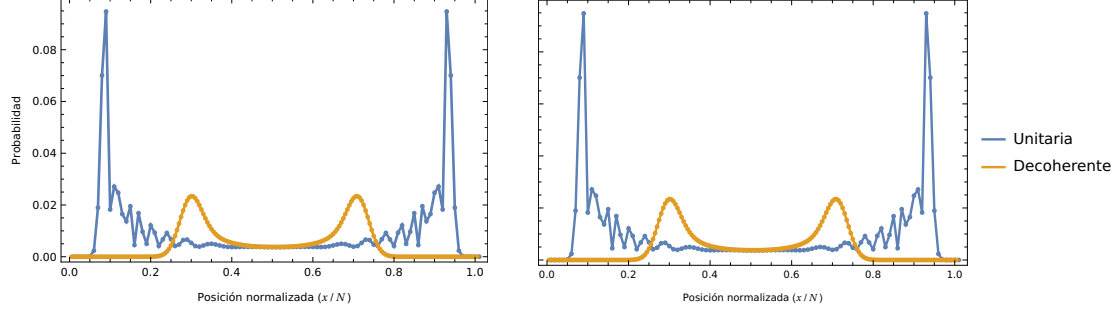


Figura 3.17. Comparación de distribuciones de probabilidad entre una caminata cuántica sin decoherencia [ec. (2.3)] y una caminata cuántica con probabilidad $p = 0.5$ de que ocurra decoherencia modelada por el canal de *fuzzy shift* [ec. (2.5)]. En el panel de la izquierda se emplea el estado inicial $\rho = |0, +y\rangle\langle 0, +y|$ para ambas dinámicas, mientras que en el panel derecho se emplea el estado inicial $\rho = |0, -y\rangle\langle 0, -y|$. Todos los resultados corresponden a $t_f = 100$ pasos de evolución temporal.

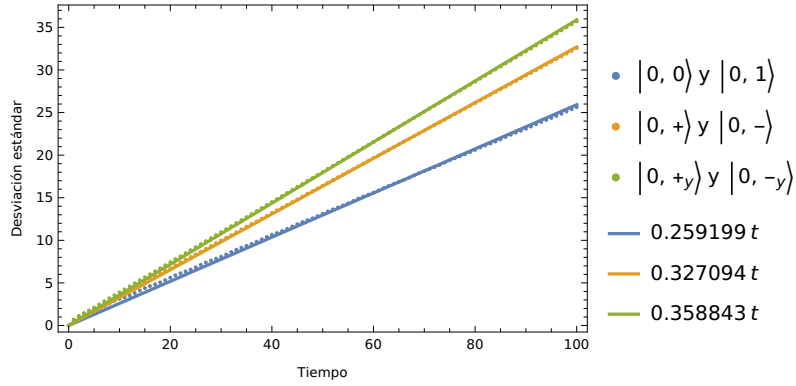


Figura 3.18. Desviación estándar en función del tiempo de las caminatas decoherentes de las figs. 3.15, 3.16 y 3.17 (líneas punteadas); junto al mejor ajuste entre el comportamiento cuántico y el clásico (líneas sólidas).

de probabilidad de la caminata con decoherencia para cada uno de los distintos estados iniciales. Ya que las distribuciones de probabilidad para estados iniciales de la moneda que son eigenestados de un mismo operador de Pauli son una reflexión horizontal la una de la otra, ambas distribuciones poseen la misma desviación estándar en función del tiempo (como se aprecia en esta figura). Además, para todos los estados iniciales mostrados, la desviación estándar es lineal, indicando que el canal no regresa al límite clásico como caminata aleatoria, sino que mantiene sus características cuánticas.

CONCLUSIONES

En este trabajo se estudió cómo la decoherencia, modelada a través del canal de *fuzzy shift*, afecta la cuanticidad de una caminata cuántica discreta. El objetivo central de implementar este canal fue simular el efecto de imperfecciones físicas reales, específicamente los desplazamientos no deterministas que pueden ser inducidos por los cristales de calcita birrefringentes en implementaciones de caminatas cuánticas en plataformas fotónicas similares a la de Wang *et al.* [21]. De este modo, el modelo permitió evaluar el impacto de estas fluctuaciones espaciales sobre la dinámica ideal del sistema.

Al analizar la transición del comportamiento cuántico al clásico del modelo de decoherencia con el canal de *fuzzy shift* aplicado al estado $|+_y\rangle$ se concluye que, a diferencia de los canales de *phase-flip* o de proyecciones, este canal no reproduce el comportamiento de una caminata aleatoria. Los resultados de la implementación numérica realizada para el estudio de este modelo de caminata cuántica muestran que la desviación estándar de la caminata bajo el canal de *fuzzy shift* mantiene un crecimiento lineal característico de la propagación balística, demostrando que el sistema no transiciona completamente hacia un régimen difusivo. Asimismo, el análisis de la norma l_1 de coherencia normalizada y de la pureza indica que, aunque el canal introduce una atenuación de las coherencias del sistema, este mantiene características cuánticas que persisten a tiempos largos, impidiendo una transición completa hacia el comportamiento difusivo clásico.

Además, se verificó numéricamente que la ausencia de un límite clásico bajo el canal de *fuzzy shift* es una propiedad inherente de la dinámica propuesta y no una consecuencia del estado inicial del sistema. Para garantizar la generalidad de este resultado y evitar posibles sesgos asociados a la elección de la base, se extendió el estudio a una muestra representativa de estados de la moneda, evaluando las tres bases mutuamente imparciales (eigenestados de los operadores de Pauli en la esfera de Bloch). Si bien la elección del estado inicial afecta la simetría de la distribución de probabilidad resultante, los resultados mostraron que, independientemente de

la preparación de la moneda, la desviación estándar conserva invariablemente un crecimiento lineal en el tiempo.

Se concluye que, a pesar de que las imperfecciones experimentales modeladas mediante el canal de *fuzzy shift* alteran la forma de la distribución de probabilidad estándar de las caminatas cuánticas, esto no destruye la propagación balística de la misma. Esto sugiere que la implementación fotónica de Wang *et al.* es robusta bajo este tipo de decoherencia, permitiendo que la caminata cuántica conserve su ventaja cuántica incluso al considerar las imperfecciones de los cristales de calcita.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] BAUMGRATZ, T.; CRAMER, M. y PLENIO, M. B.: «Quantifying Coherence». *Physical Review Letters*, 2014, **113**(14), p. 140401. doi: 10.1103/PhysRevLett.113.140401.
<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.113.140401>
- [2] BRUN, TODD A.; CARTERET, HILARY A. y AMBAINIS, ANDRIS: «Quantum random walks with decoherent coins». *Physical Review A*, 2003, **67**(3), p. 032304. ISSN 1050-2947, 1094-1622. doi: 10.1103/PhysRevA.67.032304. ArXiv:quant-ph/0210180.
<http://arxiv.org/abs/quant-ph/0210180>
- [3] GRIMMETT, GEOFFREY y STIRZAKER, DAVID: *Probability and Random Processes: Fourth Edition*. Oxford University Press, Oxford, New York, fourth^a edición, 2020. ISBN 978-0-19-884760-1.
- [4] ISHAK, NUR IZZATI; MUNIANDY, S. V. y CHONG, WU YI: «Scaling exponent analysis and fidelity of the tunable discrete quantum walk in the noisy channel». *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 2020, **559**, p. 125124. ISSN 0378-4371. doi: 10.1016/j.physa.2020.125124.
<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378437120305884>
- [5] KEMPE, J: «Quantum random walks: An introductory overview». *Contemporary Physics*, 2003, **44**(4), pp. 307–327. ISSN 0010-7514. doi: 10.1080/00107151031000110776. Eprint: <https://doi.org/10.1080/00107151031000110776>
<https://doi.org/10.1080/00107151031000110776>
- [6] KENDON, VIV: «Decoherence in quantum walks - a review», 2006. ArXiv:quant-ph/0606016.
<http://arxiv.org/abs/quant-ph/0606016>

- [7] KENDON, VIV y SANDERS, BARRY C.: «Complementarity and quantum walks». *Physical Review A*, 2005, **71(2)**, p. 022307. ISSN 1050-2947, 1094-1622. doi: 10.1103/PhysRevA.71.022307. ArXiv:quant-ph/0404043.
<http://arxiv.org/abs/quant-ph/0404043>
- [8] KENDON, VIV y TREGENNA, BEN: «Decoherence can be useful in quantum walks». *Physical Review A*, 2003, **67(4)**, p. 042315. ISSN 1050-2947, 1094-1622. doi: 10.1103/PhysRevA.67.042315. ArXiv:quant-ph/0209005.
<http://arxiv.org/abs/quant-ph/0209005>
- [9] MACKAY, TROY D.; BARTLETT, STEPHEN D.; STEPHENSON, LEIGH T. y SANDERS, BARRY C.: «Quantum walks in higher dimensions». *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 2002, **35(12)**, pp. 2745–2753. ISSN 0305-4470, 1361-6447. doi: 10.1088/0305-4470/35/12/304. ArXiv:quant-ph/0108004.
<http://arxiv.org/abs/quant-ph/0108004>
- [10] MOHSENI, MASOUD; REBENTROST, PATRICK; LLOYD, SETH y ASPURU-GUZI, ALÁN: «Environment-Assisted Quantum Walks in Photosynthetic Energy Transfer». *The Journal of Chemical Physics*, 2008, **129(17)**, p. 174106. ISSN 0021-9606, 1089-7690. doi: 10.1063/1.3002335. ArXiv:0805.2741 [quant-ph].
<http://arxiv.org/abs/0805.2741>
- [11] NAYAK, ASHWIN y VISHWANATH, ASHVIN: «Quantum Walk on the Line», 2000. ArXiv:quant-ph/0010117.
<http://arxiv.org/abs/quant-ph/0010117>
- [12] NIELSEN, MICHAEL A. y CHUANG, ISAAC L.: *Quantum computation and quantum information*. Cambridge University Press, Cambridge ; New York, 10th anniversary^a edición, 2010. ISBN 978-1-107-00217-3.
- [13] PINEDA, CARLOS; DAVALOS, DAVID; VIVIESCAS, CARLOS y ROSADO, ANTONIO: «Fuzzy measurements and coarse graining in quantum many-body systems». *Physical Review A*, 2021, **104(4)**, p. 042218. doi: 10.1103/PhysRevA.104.042218.
<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.104.042218>
- [14] RINCÓN, LUIS: *Introducción a los procesos estocásticos*. volumen 63. UNAM, Facultad de Ciencias, 2012.
- [15] ROMANELLI, A.; SICARDI-SCHIFINO, A. C.; SIRI, R.; ABAL, G.; AUYUANET, A. y DONANGELO, R.: «Quantum random walk on the line as a markovian

- process». *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 2004, **338(3-4)**, pp. 395–405. ISSN 03784371. doi: 10.1016/j.physa.2004.02.061. ArXiv:quant-ph/0310171.
<http://arxiv.org/abs/quant-ph/0310171>
- [16] ROMANELLI, A.; SIRI, R.; ABAL, G.; AUYUANET, A. y DONANGELO, R.: «Decoherence in the quantum walk on the line». *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 2005, **347**, pp. 137–152. ISSN 03784371. doi: 10.1016/j.physa.2004.08.070. ArXiv:quant-ph/0403192.
<http://arxiv.org/abs/quant-ph/0403192>
- [17] SAKURAI, JUN JOHN y TUAN, SAN FU: *Modern quantum mechanics*. Addison-Wesley, Reading (Mass.), rev.^a edición, 1994. ISBN 978-0-201-53929-5.
- [18] SHENVI, NEIL; KEMPE, JULIA y WHALEY, K. BIRGITTA: «A Quantum Random Walk Search Algorithm». *Physical Review A*, 2003, **67(5)**, p. 052307. ISSN 1050-2947, 1094-1622. doi: 10.1103/PhysRevA.67.052307. ArXiv:quant-ph/0210064.
<http://arxiv.org/abs/quant-ph/0210064>
- [19] VENEGAS-ANDRACA, SALVADOR ELÍAS: *Quantum walks for computer scientists*. Número 1 en Synthesis lectures on quantum computing. Morgan & Claypool Publishers, San Rafael, CA, 2008. ISBN 978-1-59829-657-0.
- [20] —: «Quantum walks: a comprehensive review». *Quantum Information Processing*, 2012, **11(5)**, pp. 1015–1106. ISSN 1573-1332. doi: 10.1007/s11128-012-0432-5.
<https://doi.org/10.1007/s11128-012-0432-5>
- [21] WANG, QIN-QIN; DONG, SHAOJUN; LI, XIAO-WEI; XU, XIAO-YE; WANG, CHAO; HAN, SHUAI; YUNG, MAN-HONG; HAN, YONG-JIAN; LI, CHUAN-FENG y GUO, GUANG-CAN: «Efficient learning of mixed-state tomography for photonic quantum walk». *Science Advances*, 2024, **10(11)**, p. eadl4871. ISSN 2375-2548. doi: 10.1126/sciadv.adl4871.
<https://www.science.org/doi/10.1126/sciadv.adl4871>
- [22] WATROUS, JOHN: «Quantum simulations of classical random walks and undirected graph connectivity», 1998. doi: 10.48550/arXiv.cs/9812012. ArXiv:cs/9812012.
<http://arxiv.org/abs/cs/9812012>

A. Implementación numérica

Para la obtención de los resultados presentados en este trabajo, se desarrolló un paquete de software en *Wolfram Language* (Mathematica) denominado **QW**, el cual puede encontrarse en el repositorio de GitHub <https://github.com/AmadoCab/QW>. Este paquete fue diseñado con un enfoque modular, con el objetivo de simular caminatas cuánticas discretas en el tiempo, permitiendo el estudio de la decoherencia mediante el formalismo de la matriz de densidad. A continuación, se describen los componentes principales de la implementación.

A.1. Definición del entorno de simulación

La configuración física del sistema se encapsula en una estructura de datos flexible basada en asociaciones (*Associations*). La función **DTQWEnv** construye y valida este entorno, asegurando que se proporcionen los parámetros necesarios para la simulación.

El entorno distingue entre dos regímenes de operación mediante la clave **Decoherent**:

- **Evolución unitaria:** Requiere la definición de un operador unitario, o bien, de los operadores de moneda **Coin** y desplazamiento **Shift** por separado, los cuales se combinan internamente.
- **Canales cuánticos:** Si el sistema es decoherente, el entorno valida la existencia de operadores de Kraus **Kraus** y sus probabilidades asociadas **Probabilities**.

Esta estructura permite abstraer los detalles de la caminata, pasando un único objeto **env** a las funciones de evolución.

A.2. Dinámica y evolución temporal

El núcleo de la simulación reside en la función `DTQWStep`, la cual calcula el estado ρ_{t+1} a partir de ρ_t . Este proceso se divide en tres etapas secuenciales: redimensionamiento, evolución unitaria y decoherencia.

A.2.1. Redimensionamiento dinámico del espacio

Dado que el caminante puede explorar nuevas posiciones en cada paso, el tamaño de la matriz de densidad debe ajustarse dinámicamente. La función `DTQWSpacing` gestiona este crecimiento mediante la técnica de *padding* (relleno) de matrices. Se implementaron varios modos de crecimiento controlados por el parámetro `Type` del entorno:

- **FixedSize:** Mantiene el tamaño de la matriz constante.
- **Growing:** Aplica `ArrayPad` simétricamente, añadiendo espacio a ambos lados de la matriz.
- **ForwardGrowing:** Añade espacio únicamente en una dirección, optimizando la memoria para distinto tipo de caminatas.
- **nAhead:** Añade espacio en una dirección al igual que `ForwardGrowing` pero lo hace de acuerdo al valor de n .

A.2.2. Aplicación de operadores

La evolución del estado inicial de la caminata se realiza mediante la función auxiliar `DTQWApplyOperator`. Esta función generaliza la aplicación de operadores, manejando tanto matrices explícitas como funciones operacionales.

Para sistemas unitarios, el paso se reduce a:

$$\rho_{t+1} = U \rho_t U^\dagger \quad (\text{A.1})$$

donde U es el operador de evolución unitario. Para sistemas con decoherencia, la evolución se modela como un canal cuántico. El código implementa la suma de Kraus mediante la función `Inner`, ponderando cada operador K_i por su probabilidad p_i :

$$\rho_{t+1} = \sum_i p_i K_i (U \rho_t U^\dagger) K_i^\dagger \quad (\text{A.2})$$

Esta implementación numérica permite simular cualquiera de los canales cuánticos de interés en este trabajo.

A.3. Ejecución de la simulación

El paquete ofrece dos modalidades de ejecución principales:

1. **Simulación directa (DTQW):** Ejecuta un ciclo `Do` por n pasos y retorna únicamente la matriz de densidad final, optimizando el uso de memoria cuando no se requiere la historia temporal.
2. **Traza de la evolución (DTQWTrace):** Utiliza una estructura `Table` para almacenar y retornar la lista completa de estados $\{\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_n\}$, permitiendo el análisis de la dinámica temporal.

En ambos casos, el estado inicial de la moneda c_0 se convierte automáticamente en una matriz de densidad pura mediante el producto exterior $|\psi_0\rangle\langle\psi_0|$ antes de iniciar el ciclo.

A.4. Análisis y reducción de datos

Una vez obtenida la matriz de densidad, el paquete incluye herramientas para extraer observables físicos.

A.4.1. Matriz reducida y distribución de probabilidad

La función `DTQWReducedMatrix` implementa la traza parcial, permitiendo aislar el subsistema de la posición o de la moneda. A partir de la matriz reducida de posición, la función `DTQWPosDistribution` extrae la diagonal para obtener la distribución de probabilidad clásica $P(x)$ del caminante.

A.4.2. Momentos estadísticos y ajustes

Para caracterizar el tipo de difusión (balística vs. difusiva), se implementaron funciones para calcular el valor esperado (`DTQWPosExpvalue`) y la desviación estándar (`DTQWPosStandarddev`) de la distribución.

Finalmente, la función `DTQWSdAdjustments` realiza un análisis de regresión no lineal sobre la desviación estándar en función del tiempo. El sistema compara automáticamente dos modelos de crecimiento:

- Balístico: $\sigma(t) \propto At$
- Difusivo: $\sigma(t) \propto A\sqrt{t}$

El código selecciona y retorna el modelo con el mejor coeficiente de determinación ajustado (*Adjusted R²*), permitiendo clasificar automáticamente el comportamiento de la caminata bajo diferentes condiciones de decoherencia.

A.4.3. Pureza de estado y norma ℓ_1 de coherencia

De las rutinas `DTQW` y `DTQWTrace` se obtienen las matrices de densidad correspondientes a los estados de la caminata en el tiempo. Luego, para calcular la pureza (definida en la ec. 3.5) podemos usar la rutina `Purity` aplicada a la matriz de densidad.

Del mismo modo, al tener la matriz de densidad del sistema podemos calcular la norma ℓ_1 de coherencia (definida en la ec. 3.3) usando la rutina `11Coherence` o, si se desea el resultado normalizado, `11CoherenceNormal`.

B. Trabajo social

De conformidad con lo expuesto en la introducción, el presente trabajo de graduación integra un componente de trabajo social que complementa la investigación científica desarrollada. Esta estructura permite dar cumplimiento integral a los tres ejes estratégicos de la Universidad de San Carlos de Guatemala: investigación, docencia y extensión. En este capítulo se describen las actividades llevadas a cabo que corresponden, específicamente, a los ejes de extensión y docencia.

B.1. Extensión

En el contexto universitario, **extensión** se define como el proceso de interacción entre la universidad y la sociedad. A través de este eje, la universidad proyecta su quehacer académico, científico y cultural para contribuir a la solución de problemas nacionales y a la formación integral, promoviendo la democratización del conocimiento.

Para la parte del proyecto de EPS que abarca este eje de extensión, se colaboró activamente con la Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas (ECFM) durante la participación en el evento «InfoUSAC». Las actividades realizadas incluyeron la planificación logística, la organización del *stand* informativo y la difusión directa de la oferta académica. La razón por la cual se propuso esta actividad para el eje de extensión es porque cumple con el objetivo fundamental de la difusión de la cultura científica, además de incentivar a los estudiantes de nivel medio a optar por carreras científicas que, a largo plazo, beneficien el desarrollo tecnológico y científico del país.

B.1.1. InfoUSAC

El evento «InfoUSAC» es la feria informativa más grande de Guatemala. Este evento, organizado anualmente, convoca a miles de estudiantes de nivel medio que se encuentran en proceso de preparación para su ingreso a la educación superior. Durante el evento a los estudiantes se les ofrece una visita guiada por el campus

central de la Universidad de San Carlos de Guatemala, permitiéndoles conocer los distintos organismos, facultades y escuelas que componen la USAC.

El objetivo principal no se limita a ofrecer una visita guiada por el campus central de la Universidad de San Carlos de Guatemala, sino que también incluye la instalación de *stands* por parte de cada unidad académica. De este modo, cada estudiante tiene la opción de visitar los espacios de las unidades que sean de su interés para recibir información detallada sobre carreras disponibles, pensum de estudios, salidas laborales, entre otros. Además de eso, en cada *stand* se hace partícipe a los aspirantes en actividades recreativas diseñadas para acercarlos a cada escuela o facultad. Esto cumple con un doble objetivo: (1) ayudar a los aspirantes a tomar una decisión fundamentada sobre su futuro académico y profesional, y (2) permitir que las distintas unidades académicas promocionen su oferta educativa de manera directa.

La edición InfoUSAC 2025 se llevó a cabo del 25 al 28 de marzo, en un horario de 8:00 a 15:00 horas, en la Plaza de los Mártires. En esta edición, el *stand* de la ECFM atendió a un aproximado de 300 aspirantes, a quienes se les brindó información detallada. De este grupo, aproximadamente un tercio mostró un interés marcado, inscribiéndose para recibir información adicional por correo electrónico. La colaboración brindada durante el evento se estructuró en tres fases: la elaboración de material, la preparación del *stand* y la participación activa durante el evento.

B.1.2. Elaboración de material

La fase de elaboración de material consistió en la preparación y selección de los recursos visuales y didácticos que se utilizarían para atraer e informar a los estudiantes. Entre las actividades destacadas se encuentran:

- **Colaboración en presentaciones institucionales:** Se brindó retroalimentación de la presentación institucional del Licenciado José Carlos Bonilla para complementar la información para estudiantes de física y así proyectar una imagen cohesiva de la Escuela.
- **Divulgación científica:** Se elaboró y presentó un póster sobre *Caminatas Cuánticas*. Este material sirvió como un ejemplo concreto de la investigación de alto nivel que se realiza dentro de la ECFM, ilustrando a los aspirantes sobre los temas de vanguardia en los que los estudiantes trabajan durante la carrera.
- **Material lúdico-matemático:** Se seleccionaron diversos juegos de ingenio

para interactuar con los estudiantes y desafiar su razonamiento lógico. Entre estos se incluyeron:

- El juego «senku», útil para explicar identificación de patrones y extrapolación de técnicas conocidas a nuevos problemas.
- Cubos de Rubik y Megaminx, utilizados para atraer la atención e, informalmente, introducir conceptos de simetría y teoría de grupos.
- **Colaboración con material didáctico:** Adicionalmente, se apoyó a la compañera Mariana Elizabet Pérez Muralles en la preparación de demostraciones visuales, incluyendo explicaciones sobre el Teorema de Pitágoras y las Torres de Hanoi, así como la recopilación de materiales exitosos de ediciones anteriores.

B.1.3. Preparación del stand

La logística del evento requirió un montaje y desmontaje diario para asegurar la seguridad y la correcta presentación de los equipos. Las tareas de preparación incluyeron:

- **Montaje diario:** Junto con el personal de la escuela, se colaboró a armar la estructura del *stand* cada mañana, asegurando la instalación de mobiliario básico y equipo audiovisual.
- **Identidad visual:** Se colocaron las mantas vinílicas distintivas de la Escuela y se dispusieron manteles (blancos y negros con el logotipo institucional) para mantener una estética profesional.
- **Equipamiento demostrativo:** Para despertar la curiosidad científica de los visitantes, se exhibieron instrumentos de física y astronomía, tales como:
 - Un telescopio *Firstscope Celestron*.
 - Un espectroscopio de bolsillo.
 - Mirascopios 3D (dos pequeños y uno grande) para demostraciones de óptica.
- **Material informativo y promocional:** Se distribuyeron copias de los pensa de las licenciaturas en Física y Matemática. Asimismo, se compartieron códigos QR para facilitar el acceso al calendario de exámenes específicos y se entregaron *souvenirs* como lapiceros y separadores de libros a los visitantes interesados.

B.1.4. Evento

Durante los cuatro días de duración de InfoUSAC, la actividad principal consistió en la atención al público. Se mantuvo una presencia constante en el *stand* (con rotaciones para tiempos de comida), logrando interactuar con cerca de 300 personas. La dinámica de información se dividió en dos vertientes principales:

- **Información administrativa y de ingreso:** Se explicó a los aspirantes el proceso de admisión a la USAC, detallando:
 - La necesidad de aprobar los exámenes básicos (Física y Lenguaje) y el examen específico de Matemática propio de la Escuela.
 - Se instó a los estudiantes a consultar el temario y la bibliografía recomendada mediante los enlaces QR proporcionados, así como a revisar exámenes de años anteriores como método de estudio.
 - Se aclararon dudas sobre la estructura de la carrera: duración de 5 años, jornada matutina (de lunes a viernes) y la modalidad de pénsum cerrado.
- **Orientación vocacional y académica:** Más allá de los trámites, se buscó inspirar a los estudiantes resaltando las fortalezas de la ECFM:
 - **Educación personalizada:** Se enfatizó que, debido al número reducido de estudiantes, la educación es altamente personalizada, permitiendo una interacción directa con profesores de alto nivel académico.
 - **Campo laboral:** Se desmitificó la falta de empleo, mencionando oportunidades en instituciones como el INSIVUMEH, el INCAN, así como en el sector privado en áreas de análisis de datos y economía.
 - **Aplicaciones modernas:** Se ofrecieron ejemplos concretos del impacto de estas ciencias, como el uso de la matemática en criptografía e Inteligencia Artificial, o el uso de la física en la predicción climática y la física médica.

Adicionalmente, el tercer día del evento se contó con la participación del Club de Astronomía y se organizaron visitas guiadas a los laboratorios de la Escuela, permitiendo a los aspirantes ver de primera mano el entorno de trabajo.

B.2. Docencia

Como parte del componente de docencia del proyecto de EPS, se diseñó e impartió el taller titulado *De ecuaciones a código: Introducción a Wolfram Language*



Figura B.1. Día 1, inauguración del evento.



Figura B.2. Día 2, informando a visitantes sobre la carrera



Figura B.3. Día 3, visitando los laboratorios



Figura B.4. Día 4, foto con el *staff* del día

y *Mathematica*. Este proyecto educativo fue realizado en colaboración con la estudiante de la Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas, Mariana Elizabet Pérez Muralles, con el propósito de fortalecer las habilidades computacionales de los estudiantes.

B.2.1. Descripción general y objetivos

El taller se llevó a cabo en modalidad virtual a través de la plataforma Google Meet, durante la semana del 4 al 8 de agosto de 2025, en un horario de 18:00 a 19:00 horas. El objetivo principal fue enseñar el uso de **Wolfram Mathematica** desde sus fundamentos, proporcionando una base sólida en la sintaxis del lenguaje de programación *Wolfram Language*, con un enfoque particular en aplicaciones prácticas para la física y las matemáticas.

Para facilitar el aprendizaje, se gestionaron y proporcionaron licencias gratuitas de Mathematica a los participantes inscritos, asegurando que todos tuvieran acceso a las herramientas necesarias para el curso. Esto fue posible gracias a la licencia

obtenida por la Academia de Ciencias Médicas, Físicas y Naturales de Guatemala.

B.2.2. Metodología y contenido curricular

El curso se estructuró en cinco sesiones teórico-prácticas, diseñadas para guiar al estudiante desde la familiarización con el entorno hasta la visualización avanzada de datos. Se utilizaron *notebooks* interactivos (.nb) como material didáctico principal. Para enlazar el conocimiento teórico impartido durante la sesión cada uno de los *notebooks* contenía una sección de ejemplos prácticos de solución de problemas conseguidas mediante lo aprendido en la sesión. A continuación se detalla el contenido abordado en cada sesión:

- **Sesión 1: Introducción al entorno y sintaxis.** Se introdujo la interfaz de cuaderno (*notebook interface*), explicando el concepto de celdas de entrada y salida, así como el uso del kernel. Se abordaron las características básicas del lenguaje natural integrado y la sintaxis fundamental de Wolfram Language (fig. B.5).

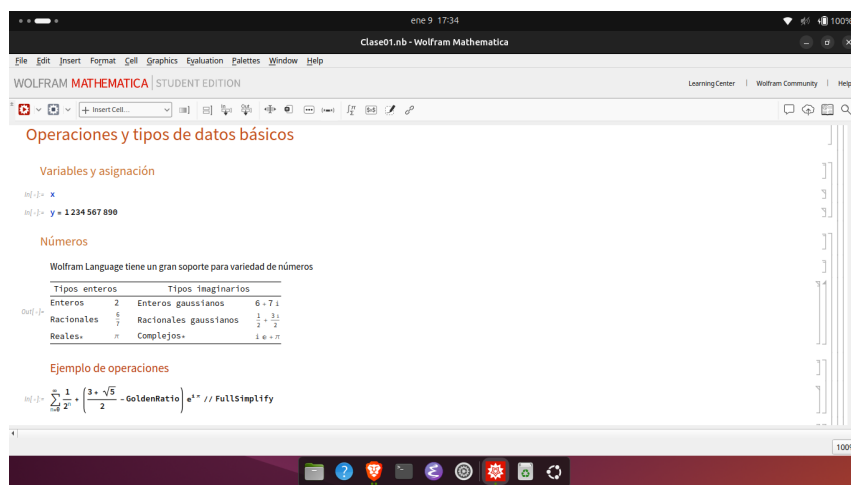


Figura B.5. *Notebook* de la primera sesión.

- **Sesión 2: Estructuras de datos y bucles.** En esta sesión se profundizó en las formas de organizar y almacenar información. Se explicaron las listas como estructuras fundamentales, el acceso a elementos mediante índices y la implementación de bucles para la iteración y procesamiento de datos (fig. B.6).
- **Sesión 3: Creación y aplicación de funciones.** Se instruyó a los estudiantes en la definición de funciones propias para evitar la repetición de código, aprove-

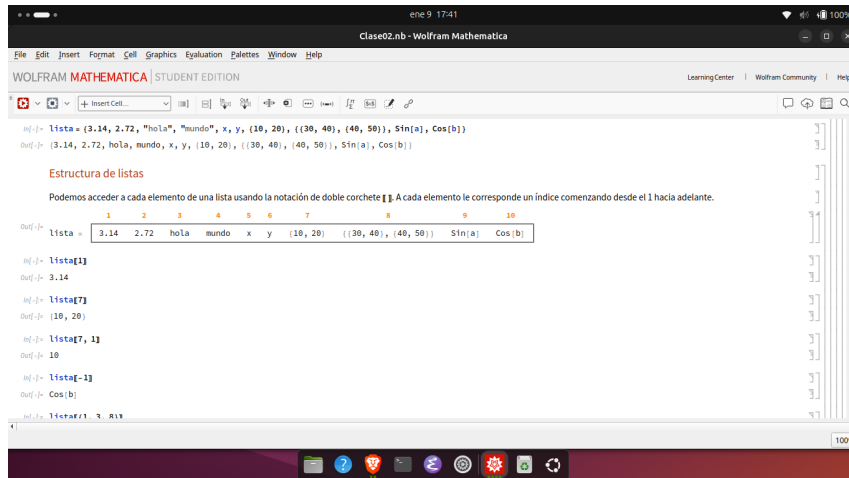


Figura B.6. *Notebook* de la segunda sesión.

chando el paradigma de programación funcional que caracteriza a Mathematica. Se cubrieron temas de asignación de variables y modularización del código (fig. B.7).

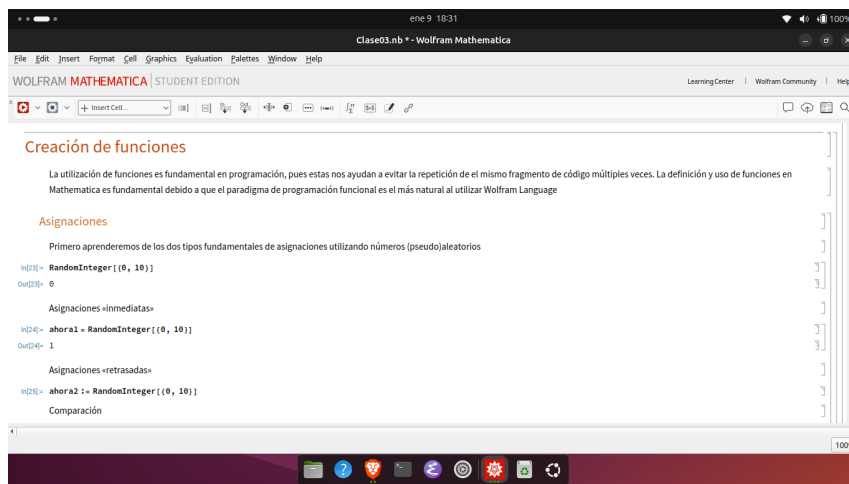


Figura B.7. *Notebook* de la tercera sesión.

- **Sesión 4: Matemáticas avanzadas (simbólicas y numéricas).** Se exploraron las capacidades del software para el cálculo simbólico y numérico. Los temas incluyeron álgebra, trigonometría, resolución de ecuaciones, y manipulación de expresiones matemáticas complejas, herramientas esenciales para el desarrollo académico en física y matemática (fig. B.8).
- **Sesión 5: Visualización de datos y gráficas.** El curso concluyó con el estudio de las herramientas de visualización. Se enseñó a generar gráficos en

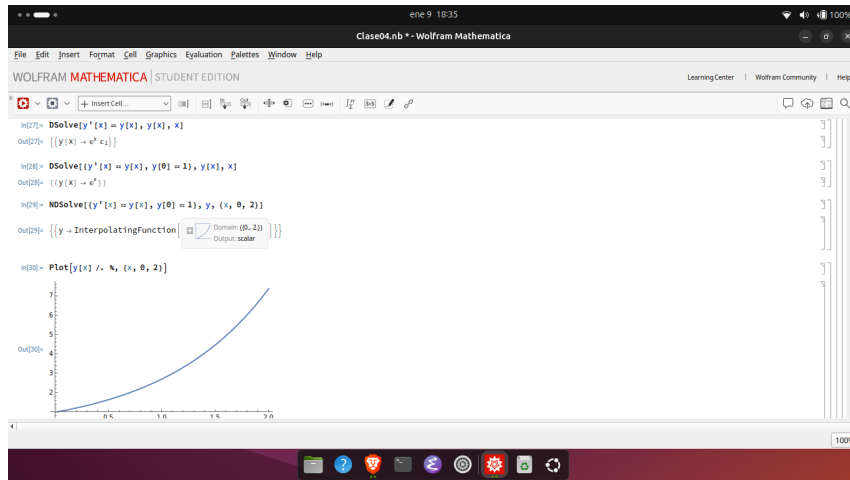


Figura B.8. *Notebook* de la cuarta sesión.

2D y 3D, personalizar estilos visuales y crear representaciones interactivas de funciones matemáticas para facilitar la interpretación de resultados (fig. B.9).

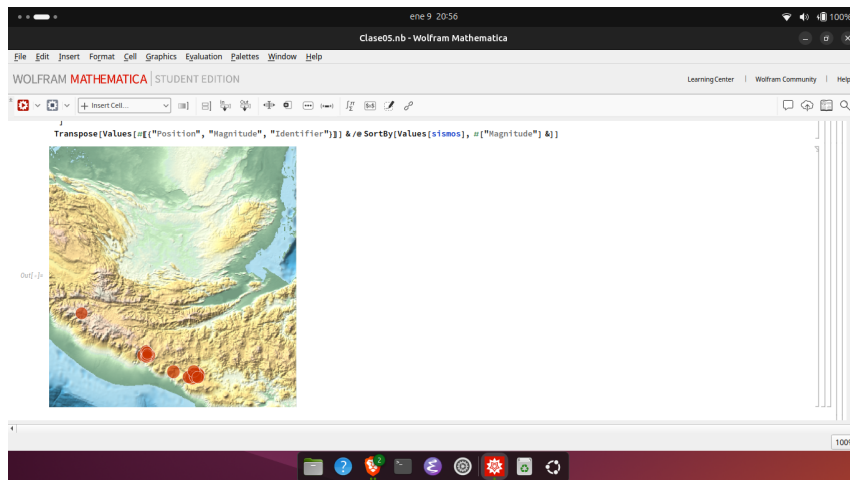


Figura B.9. *Notebook* de la quinta sesión.

B.2.3. Recursos y plataformas de apoyo

Para garantizar el seguimiento y la disponibilidad del material, se utilizaron plataformas digitales complementarias:

- **Repositorio de código:** Todo el material del curso, incluyendo los *notebooks* y la documentación técnica, se alojó en un repositorio de GitHub de acceso público (<https://github.com/AmadoCab/MathematicaCourse>), permitiendo el control de versiones y la descarga asíncrona por parte de los estudiantes.

- **Página de seguimiento:** Se habilitó un espacio en Notion para centralizar la documentación adicional, el progreso del curso y los recursos complementarios, facilitando la organización del taller.

B.2.4. Resultados del taller

La convocatoria del taller tuvo una respuesta positiva por parte de la comunidad estudiantil. Se registraron un total de **73 participantes** inscritos a través del formulario digital. El grupo fue heterogéneo, contando con una participación mayoritaria de estudiantes de la Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas (ECFM), seguida de una representación significativa de la Facultad de Ciencias Químicas y Farmacia.

B.2.4.1. Perfil de los participantes

El análisis de los datos de inscripción muestra que el 63 % de los asistentes pertenecían a la ECFM, lo cual se alinea con el público objetivo principal del taller. Sin embargo, la asistencia de estudiantes de otras unidades académicas, e incluso de otras universidades, evidencia el interés interdisciplinario en el aprendizaje de herramientas computacionales como Wolfram Mathematica.

A continuación se detalla la distribución de los participantes según su unidad académica de procedencia:

Tabla B.1. Distribución de participantes inscritos por unidad académica.

Unidad Académica / Institución	Cantidad	Porcentaje
Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas (ECFM)	46	63.0 %
Facultad de Ciencias Químicas y Farmacia	17	23.3 %
Facultad de Ingeniería	2	2.7 %
Otras facultades y universidades*	8	11.0 %
Total	73	100 %

*Incluye estudiantes de Humanidades, Ciencias Económicas y universidades privadas.

B.2.4.2. Evaluación y retroalimentación

Debido a la naturaleza intensiva del curso (cinco sesiones de una hora) y con el objetivo de maximizar el tiempo dedicado a la enseñanza de contenidos y práctica en vivo, se optó por no realizar evaluaciones sumativas formales. La prioridad pedagógica fue proporcionar a los asistentes una base sólida y funcional («nociones básicas»)

que les permitiera continuar explorando el lenguaje de programación de manera autodidacta.

A pesar de la ausencia de una calificación formal, se mantuvo una comunicación constante con los asistentes. La retroalimentación recibida de manera verbal y directa al finalizar las sesiones fue altamente positiva, destacando la utilidad de los *notebooks* proporcionados y la claridad en la explicación de la transición de las ecuaciones matemáticas a su implementación en código.