

Informe de Práctica final:

Caos cuántico en el modelo de Bose Hubbard.

Saúl Nájera Allara

Asesor: M.Sc. José Alfredo de León

Universidad de San Carlos de Guatemala, USAC.
Escuela de ciencias físicas y matemáticas, ECFM

1 Introducción

El estudio del caos cuántico en sistemas de muchos cuerpos es un área de investigación que ha cobrado impulso en los últimos años, motivado en parte por el continuo avance en las capacidades computacionales [1]. Dicho estudio resulta fundamental para comprender fenómenos como la termalización y la localización en sistemas cuánticos aislados [2, 3]. De manera general, las firmas del caos cuántico se pueden identificar analizando la estructura de los eigenvectores, estudiando medidas dinámicas como la probabilidad de supervivencia [9] (*survival probability*), o evaluando las propiedades estadísticas del espectro de energías del hamiltoniano.

Centrándonos en el enfoque espectral, la conjetura de Bohigas-Giannoni-Schmit (BGS) establece que las fluctuaciones espectrales de un sistema cuántico cuyo análogo clásico es caótico exhiben repulsión de niveles, y sus propiedades estadísticas coinciden con las predicciones de la Teoría de Matrices Aleatorias (RMT) [4]. Por el contrario, la conjetura de Berry-Tabor [5] dicta que los sistemas integrables presentan espectros no correlacionados que siguen una estadística de Poisson, permitiendo la agrupación de niveles (*level clustering*). Estas conjeturas han sido verificadas computacional y experimentalmente en una diversidad de modelos, consolidándose como el paradigma estándar para diagnosticar el caos cuántico [6].

El modelo de Bose-Hubbard sobre una red constituye un sistema simple sumamente útil para estudiar el caos cuántico, dado que la transición entre sus regímenes integrable y caótico depende fundamentalmente de un único parámetro de control: el cociente J/U . Además de su relevancia teórica para describir bosones sin espín, este modelo posee un fuerte interés experimental gracias a su realización mediante átomos ultrafríos confinados en redes ópticas [7, 8]. Al modular la profundidad de estas redes, es posible controlar de forma aislada el balance entre la energía cinética (tunelaje) y la energía de interacción de las partículas, permitiendo explorar distintas fases dinámicas [7, 8].

El presente trabajo tiene como objetivo caracterizar la transición entre los regímenes de integrabilidad y caos cuántico en el modelo de Bose-Hubbard unidimensional con condiciones de frontera abiertas. Para efectuar dicha caracterización y comparar las distribuciones empíricas frente a las predicciones teóricas del ensamble ortogonal gaussiano (GOE) y la estadística de Poisson, se implementan dos indicadores espectrales: el valor promedio del cociente de espaciamentos a primeros vecinos $\langle r \rangle$ y la divergencia de Kullback-Leibler. Ambos indicadores permiten capturar las correlaciones de corto alcance en el espectro de energías.

El documento se estructura de la siguiente manera: en la Sección 2 se presenta el marco teórico, definiendo analíticamente el modelo de Bose-Hubbard y los fundamentos de los indicadores estadísticos propuestos. En la Sección 3 se muestran y discuten los resultados numéricos obtenidos respecto a las transiciones de la estadística espectral. Finalmente, en la Sección 4 se exponen las conclusiones principales de este estudio.

2 Marco Teórico

2.1 El modelo de Bose Hubbard

El modelo de Bose-Hubbard es una de las descripciones más simples de un conjunto de bosones sin espín en una red [9]. Históricamente, fue el primer modelo en ser realizado experimentalmente mediante el uso de átomos ultrafríos confinados en redes ópticas [7, 8], en donde al modular el cociente U/J mediante el aumento de la intensidad de los láseres de la red, se logró observar una transición de fase cuántica entre un estado superfluido (donde los átomos están deslocalizados) y un estado aislante de Mott (donde los átomos se localizan en sitios específicos) [8]. El presente trabajo considera este modelo con condiciones de frontera abiertas, describiendo la dinámica de N bosones sin espín en una red unidimensional de L sitios. Para representar algebraicamente el sistema, resulta conveniente utilizar la base de ocupación o base de Fock. Los elementos de esta base se etiquetan mediante los kets $|n_1, n_2, \dots, n_L\rangle$, donde n_i indica el número de partículas en el i -ésimo sitio, sujetos a la restricción de que $\sum_{i=1}^L n_i = N$. Sobre esta base actúan los operadores de creación \hat{a}_i^\dagger y aniquilación \hat{a}_i , los cuales satisfacen la relación de conmutación canónica $[\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger] = \delta_{ij}$. Su acción individual sobre los estados de Fock está dada por:

$$\hat{a}_i^\dagger |\dots, n_i, \dots\rangle = \sqrt{n_i + 1} |\dots, n_i + 1, \dots\rangle, \quad \hat{a}_i |\dots, n_i, \dots\rangle = \sqrt{n_i} |\dots, n_i - 1, \dots\rangle. \quad (1)$$

A partir de estos se define el operador número $\hat{n}_i = \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i$, cuya acción extrae la cantidad de bosones presentes en el sitio i [2]:

$$\hat{n}_i |n_1, \dots, n_L\rangle = n_i |n_1, \dots, n_L\rangle. \quad (2)$$

La dimensión D del espacio de Hilbert total, denotado como \mathcal{H} , asociado a una configuración de N partículas en L sitios, crece combinatoriamente según la relación [2]:

$$D = \frac{(N + L - 1)!}{N!(L - 1)!}. \quad (3)$$

El hamiltoniano del sistema, tomando $\hbar = 1$, se expresa como [2]:

$$\hat{H} = -J \sum_{i=1}^{L-1} (\hat{a}_i^\dagger \hat{a}_{i+1} + \hat{a}_{i+1}^\dagger \hat{a}_i) + \frac{U}{2} \sum_{i=1}^L \hat{n}_i (\hat{n}_i - 1). \quad (4)$$

El primer término, proporcional a J , representa la energía cinética y describe el tunelaje a primeros vecinos de las partículas entre sitios adyacentes de la red. El segundo término, proporcional a U , describe la energía potencial de interacción repulsiva entre partículas que ocupan un mismo sitio [2].

Este hamiltoniano posee un conjunto de simetrías que determinan las propiedades de su espectro. Se distinguen simetrías unitarias, que dan lugar a cantidades conservadas, y simetrías antiunitarias.

Entre las simetrías unitarias, el sistema cuenta con una simetría de fase global asociada a la conservación del número total de bosones N . Adicionalmente, posee una simetría de reflexión espacial, representada por el operador unitario \hat{R} , el cual invierte el orden de la red [9]:

$$\hat{R} |n_1, n_2, \dots, n_L\rangle = |n_L, n_{L-1}, \dots, n_1\rangle. \quad (5)$$

La cantidad conservada asociada a esta simetría es conocida como la paridad, la cual permite clasificar los eigenestados de \hat{H} en pares e impares [2]. En consecuencia, el espacio de Hilbert se descompone en la suma directa de un subespacio simétrico \mathcal{H}^+ y uno antisimétrico \mathcal{H}^- [10]:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}^+ \oplus \mathcal{H}^-. \quad (6)$$

Por otro lado, el sistema conserva la invarianza ante inversión temporal (TRS), una simetría antiunitaria. Aunque no posee una cantidad conservada asociada que fuerce a una descomposición del espacio de Hilbert, esta simetría impone que la matriz del hamiltoniano sea simétrica y con entradas puramente reales.

2.2 Mean spacing Ratio

La noción de caos cuántico puede ser identificada a través de las fluctuaciones espectrales del espectro de energías del hamiltoniano y sus propiedades estadísticas. Según la conjetura de Berry-Tabor [5], si el sistema clásico subyacente es integrable, las fluctuaciones de los niveles de energía de su contraparte cuántica se comportan como variables aleatorias no correlacionadas. Por otro lado, la conjetura de Bohigas-Giannoni-Schmit (BGS) [4] establece que el espectro de energías de los sistemas cuánticos caóticos exhibe repulsión entre los niveles de energía y sus propiedades estadísticas universales coinciden con las de alguno de los ensambles de la teoría de matrices aleatorias (RMT). Para el presente trabajo, el sistema conserva la simetría de inversión temporal (TRS), por lo que la estadística espectral del sistema, de estar en un régimen caótico, estaría descrita por el ensamble ortogonal gaussiano (GOE) [11].

Para estudiar las propiedades espectrales del sistema, son empleados distintos indicadores estadísticos. Históricamente, uno de los indicadores más utilizados para este propósito ha sido la distribución del espaciamiento de niveles a primeros vecinos [4, 5, 12]. A partir del espectro de valores propios ordenados en forma ascendente $\{E_n\}$, el espaciamiento entre primeros vecinos está dado por:

$$s_n = E_{n+1} - E_n. \quad (7)$$

Para el GOE, que describe el régimen caótico del sistema del presente trabajo, Wigner propuso que la distribución de probabilidad de los espaciamientos normalizados se aproxima a:

$$P(s) = \frac{\pi}{2} s \exp\left(-\frac{\pi}{4} s^2\right). \quad (8)$$

La distribución de Wigner pone en manifiesto la repulsión de niveles de energía, la probabilidad de encontrar dos niveles de energía degenerados o muy cercanos es nula ($P(s) \rightarrow 0$ cuando $s \rightarrow 0$). Esto es una muestra de la existencia de correlaciones en el espectro. Por otro lado, para un sistema integrable, los niveles de energía están incorrelacionados y no se repelen, sino que tienden a agruparse (*level clustering*) dando lugar a una distribución estadística de Poisson [11].

En la práctica, comparar directamente los espaciamentos s_n con las distribuciones teóricas presenta dificultades debido a que la densidad local de estados varía a lo largo del espectro de energía de manera dependiente de las características del sistema. Por lo que la distribución de espaciamentos debe de ser computada después de remover las características espectrales que dependen específicamente del sistema mediante un procedimiento llamado *unfolding* [13]. Dado que el *unfolding* presenta un problema en sí, estas dificultades pueden ser eludidas considerando una cantidad estadística alternativa propuesta originalmente por Oganessian y Huse [14]. Este indicador es el cociente de espaciamentos a primeros vecinos:

$$r_n = \frac{\min(s_n, s_{n-1})}{\max(s_n, s_{n-1})}. \quad (9)$$

Esta es una cantidad adimensional, no depende de la densidad local de estados y, en consecuencia, no requiere *unfolding* [13, 14]. Estudiando la distribución de probabilidad asociada a los cocientes de espaciamento de niveles es posible determinar si el sistema está en una configuración integrable o caótica. La distribución que predice el GOE es [15]:

$$P_{\text{GOE}}(r) = 2\Theta(1-r) \cdot \left(\frac{27}{8} \frac{r+r^2}{(1+r+r^2)^{5/2}} \right). \quad (10)$$

donde $\Theta(r)$ es la función Heaviside. La distribución de Poisson para niveles de energía sin correlaciones es [15]:

$$P_{\text{Poisson}}(r) = 2\Theta(1-r) \cdot \left(\frac{1}{(1+r)^2} \right). \quad (11)$$

Una de las diferencias más importantes entre estas dos distribuciones es que cuando $r = 0$ se observa para el GOE una repulsión de los valores propios mientras que para Poisson se observa que la densidad de probabilidad de tener dos valores propios iguales es no nula. Con estas expresiones es posible extraer un valor promedio, $\langle r \rangle$, para cada distribución de probabilidad de los cocientes de espaciamentos. En particular, para el ensamble GOE, dicho valor es de $\langle r \rangle_{\text{GOE}} = 0.5307$ y para la distribución de Poisson un valor de $\langle r \rangle_{\text{Poisson}} = 0.38629$.

2.3 Divergencia de Kullback-Leibler

Aunque el valor esperado $\langle r \rangle$ proporciona una forma de estudiar el espectro de energías, reducir toda la estadística espectral a estudiar únicamente el primer momento de la distribución implica una pérdida de información. Emplear únicamente este primer momento es insuficiente, puesto que existen familias enteras de distribuciones de probabilidad distintas que comparten la misma media. Por ejemplo, una distribución normal estándar $\mathcal{N}(0,1)$ y una distribución bimodal compuesta por dos deltas de Dirac simétricas en ± 1 , dadas por $\frac{1}{2}\delta(x-1) + \frac{1}{2}\delta(x+1)$, ambas poseen un valor esperado de cero, a pesar de describir estadísticas diferentes. Por lo tanto, para afirmar con rigor el tipo de estadística que sigue el espectro, es necesario emplear indicadores adicionales al $\langle r \rangle$. Para cuantificar la similitud entre las distribuciones de probabilidad $P(r)$ del sistema y los modelos teóricos, se considera la divergencia de Kullback-Leibler (KL) [16]. Conocida también como entropía relativa, es una medida asimétrica que cuantifica cuánta información se pierde cuando una distribución de referencia Q se utiliza para aproximar una distribución de probabilidad empírica P . Su expresión general para variables continuas en el intervalo de interés viene dada por:

$$D_{\text{KL}}(P \parallel Q) = \int_0^1 P(x) \ln \left(\frac{P(x)}{Q(x)} \right) dx. \quad (12)$$

Para distribuciones $P(x)$ que se aproximan suficientemente bien a la distribución de referencia $Q(x)$, el valor de la KL es cercana a cero. En el contexto de este trabajo, $P(x)$ representa la distribución de probabilidad numérica de los cocientes de espaciamentos obtenida a partir de la ecuación (9). Para poder identificar las transiciones entre regímenes dinámicos, es posible evaluar la divergencia KL comparando la distribución empírica con la expresión analítica del GOE, dada en la ecuación (10), ~~sin~~ y también con la distribución de Poisson correspondiente a sistemas integrables, dada por la ecuación (11). A diferencia de $\langle r \rangle$, la divergencia KL compara las distribuciones de probabilidad punto a punto, constituyendo un indicador estadístico robusto para analizar la distribución de probabilidad $P(r)$.

3 Resultados

Se presenta la caracterización de la transición integrabilidad-caos en el modelo de Bose-Hubbard unidimensional con condiciones de frontera abiertas (Sec. 2.1). Para comparar la distribución empírica de cocientes de espaciamiento $P(r)$ con las predicciones teóricas del GOE y de Poisson, se emplearon la media de espaciamientos $\langle r \rangle$ (Sec. 2.2, ec. (9)) y la divergencia Kullback-Leibler (KL) (Sec. 2.3, ec. (12)). Fijando $U = 1$ y variando J , se evaluaron los sectores simétrico y antisimétrico del hamiltoniano para tamaños de sistema $N = L = 7, 8, 9, 10$.

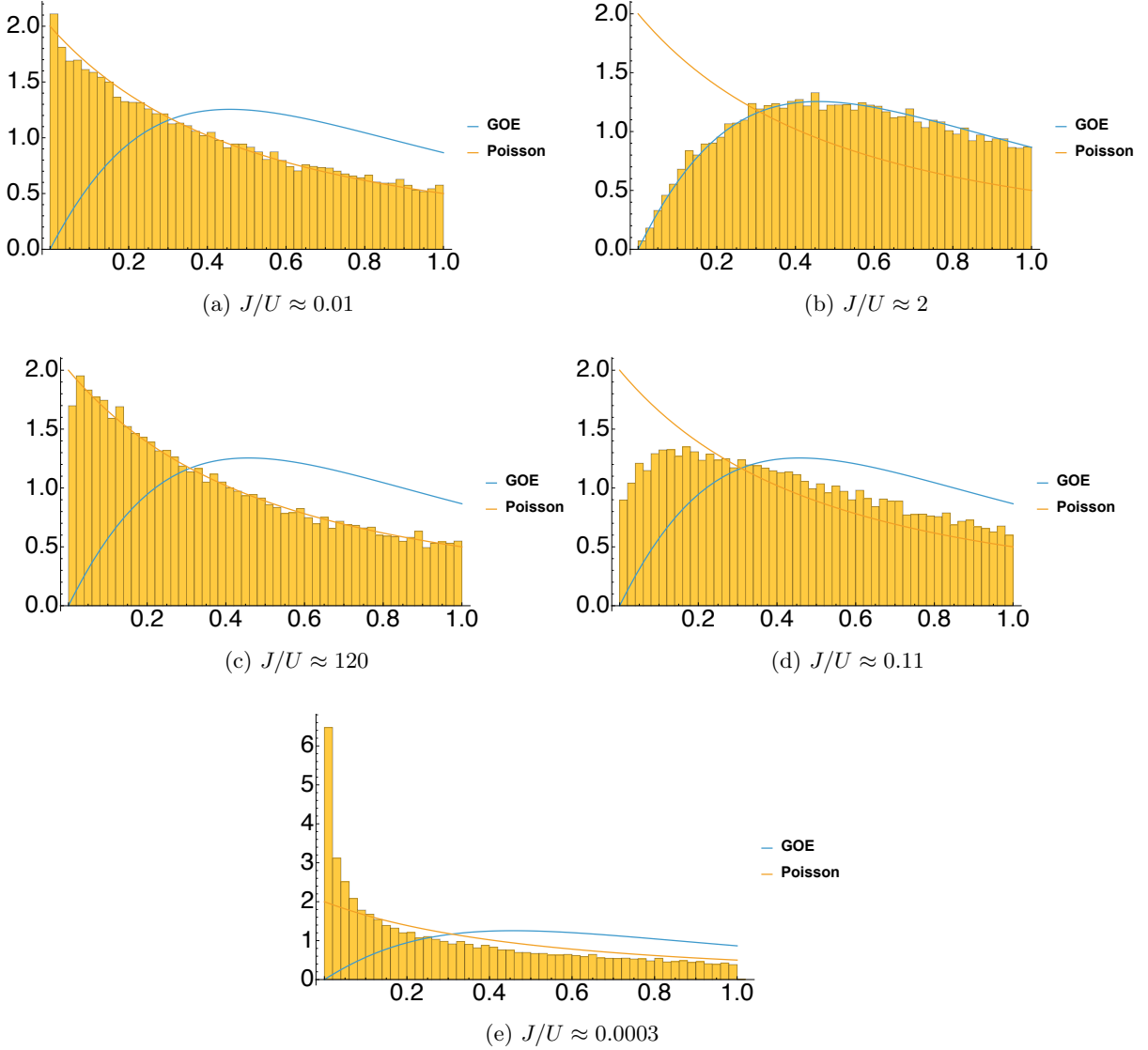


Figure 1: Distribución empírica del cociente de espaciamientos para puntos representativos de J/U , evaluados en el sector simétrico del hamiltoniano de Bose Hubbard con una red de 10 sitios y 10 partículas.

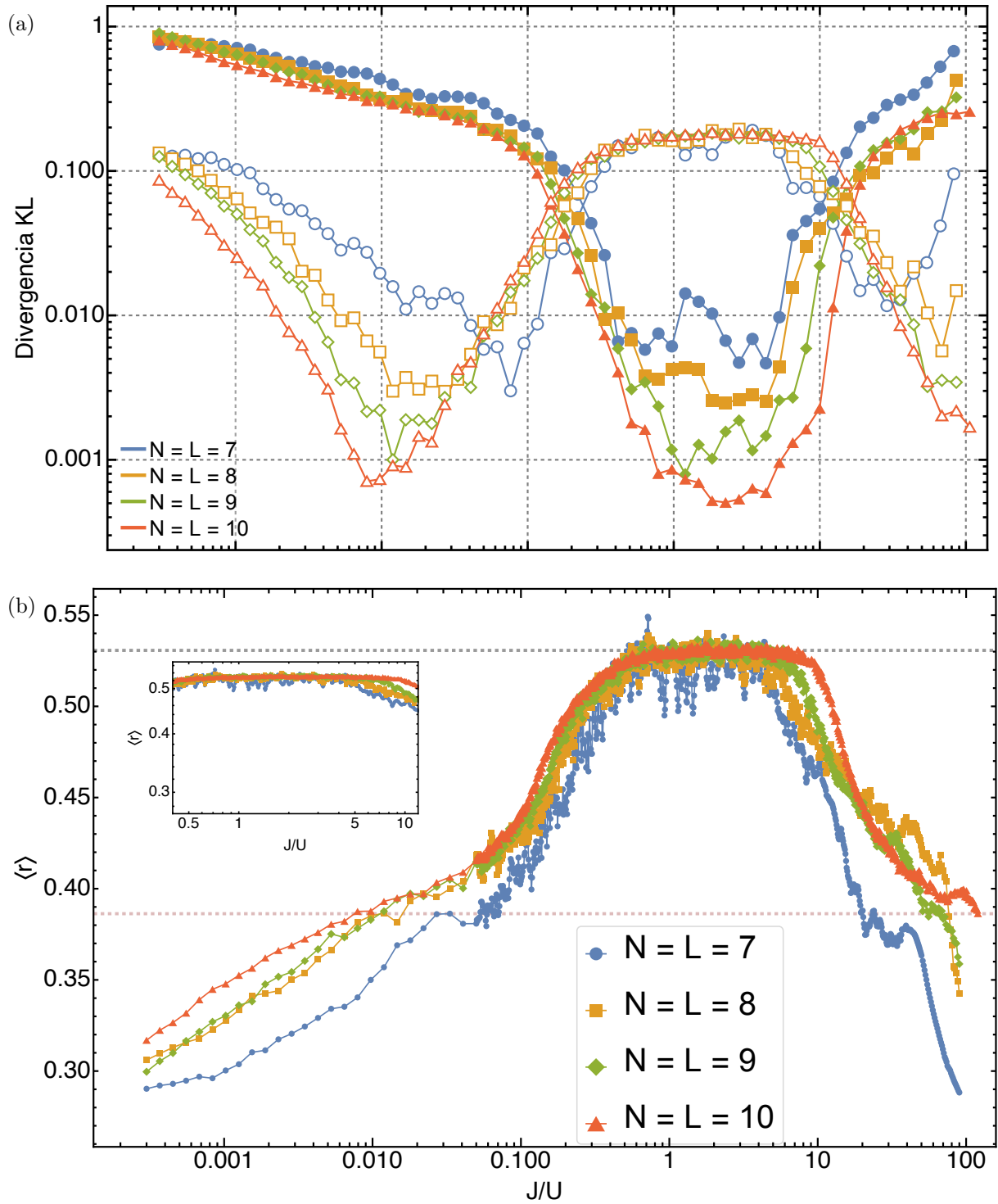


Figure 2: Para el sector simétrico del modelo (4), en el primer panel se muestra el valor de la divergencia KL en función del parámetro J/U respecto a las estadísticas de referencia GOE y Poisson; en el segundo panel, el valor del indicador $\langle r \rangle$ en función del cociente J/U . Los marcadores cerrados corresponden a la divergencia KL respecto al GOE y los abiertos respecto a la distribución de Poisson.

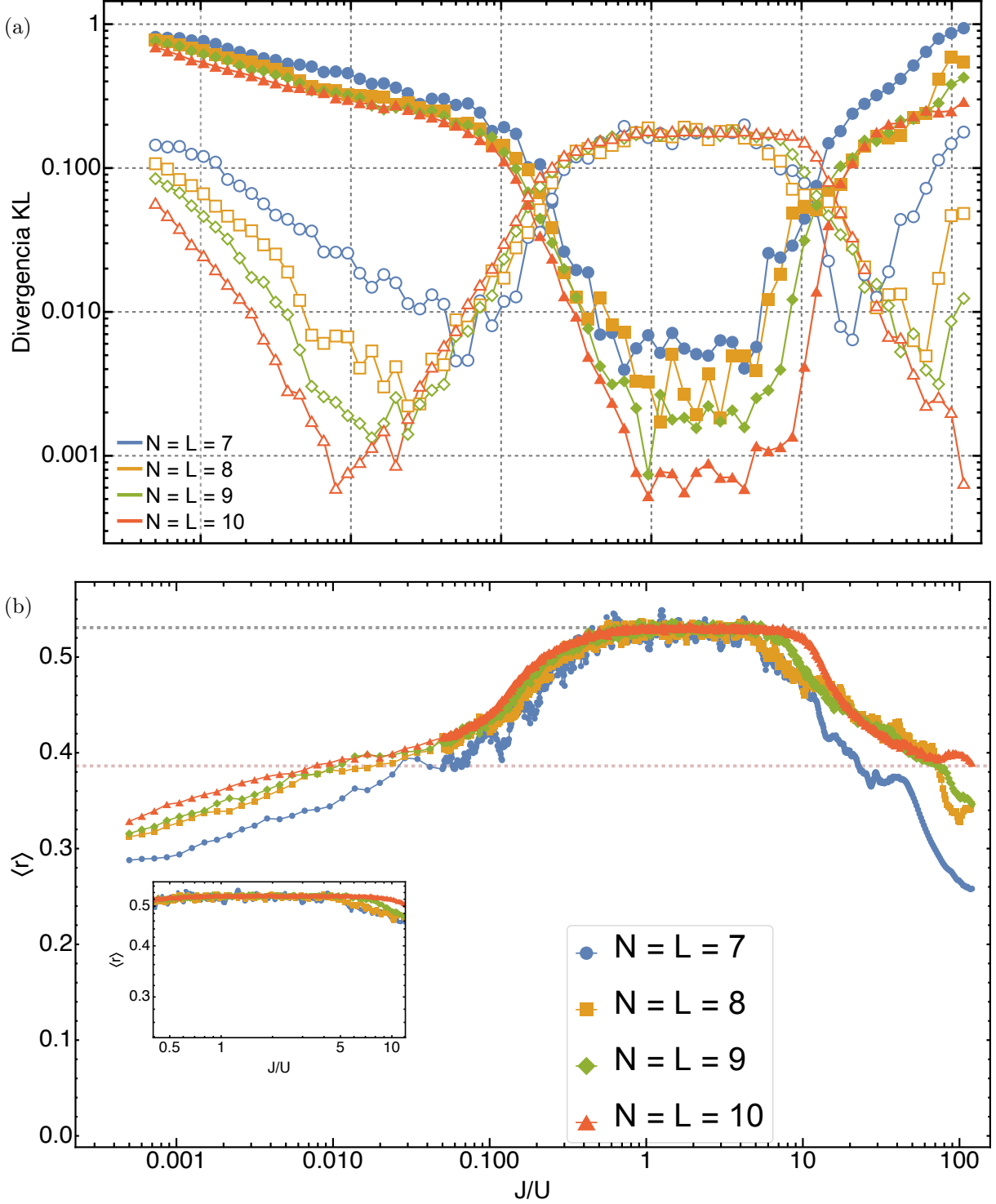


Figure 3: Para el sector antisimétrico del modelo (4), en el primer panel se muestra el valor de la divergencia KL en función del parámetro J/U respecto a las estadísticas de referencia GOE y Poisson; en el segundo panel, el valor del indicador $\langle r \rangle$ en función del cociente J/U . Los marcadores cerrados corresponden a la divergencia KL respecto al GOE y los abiertos respecto a la distribución de Poisson.

En las Figs. 2 (b) y 3 (b) se muestra el comportamiento de $\langle r \rangle$ al variar $J/U \in (0, 120]$. Inicialmente, empezando desde J/U cercano a 0, el valor de $\langle r \rangle$ no concuerda con las predicciones de Poisson ni del GOE. Al incrementar J/U , se alcanza un valor promedio compatible con Poisson en torno a $J/U \approx 0.05$ para $N=L=7$, y $J/U \approx 0.01$ para $N=L=8, 9, 10$. Posteriormente, se observa una transición hacia un régimen con una correspondencia al ensamble GOE, donde $\langle r \rangle$ se estabiliza en el valor dado según (2.2) dentro del intervalo $J/U \in [0.5, 10]$, de manera independiente al tamaño del sistema.

Para valores $J/U > 10$, $\langle r \rangle$ decrece de nuevo, indicando una segunda transición hacia un régimen con correspondencia con Poisson. El sistema retorna a un valor promedio cercano a (2.2) en intervalos dependientes del tamaño ([20, 25] para $N = L = 7$; [50, 80] para $N = L = 8, 9$; y $J/U \approx 110$ para $N = L = 10$). Finalmente, para valores aún mayores, $\langle r \rangle$ decae alejándose de ambas estadísticas teóricas. Aunque el indicador $\langle r \rangle$ por sí solo evalúa únicamente el primer momento de la distribución (Sec. 2.3), los resultados discutidos sugieren una transición de integrabilidad a caos y de nuevo a integrabilidad, es necesario corroborar que la $P(r)$ se *aproxime* suficientemente bien a Poisson para el caso integrable y a GOE para el caso caótico.

La divergencia KL (Figs. 2 (a) y 3 (a)) corrobora esta tendencia, demostrando que en las regiones identificadas mediante la $\langle r \rangle$, la $P(r)$ efectivamente se aproxima a las distribuciones de referencia. Sin embargo, la KL revela que no existen intervalos amplios de correspondencia estricta, sino puntos particulares de J/U que minimizan la divergencia. Para cada tamaño, se identifican tres puntos de particulares: dos que maximizan la proximidad con Poisson y uno intermedio que maximiza la correspondencia con el GOE.

Las distintas configuraciones espectrales se ejemplifican en la Fig. 1. Los paneles (a) y (c) exhiben valores de J/U donde la $P(r)$ empírica sigue la distribución de Poisson, mientras que el (b) ilustra el régimen caótico descrito por el GOE. En contraste, el panel (d) muestra un estado de transición con estadística intermedia, y el (e) evidencia la desviación respecto a Poisson propia de los regímenes asintóticos extremos.

Aunque el sistema transiciona a una fase integrable cuando $J/U \rightarrow 0$ y $J/U \rightarrow \infty$, las distribuciones en estos límites no reproducen la estadística de Poisson. Esta aparente contradicción se explica al examinar la estructura espectral en los casos asintóticos:

- Límite cuando $J/U \rightarrow 0$: Corresponde al caso $J = 0$ y $U \neq 0$, representando bosones sin tunelaje confinados en su sitio inicial. El hamiltoniano es:

$$\hat{H} = \frac{U}{2} \sum_{i=1}^L \hat{n}_i (\hat{n}_i - 1). \quad (13)$$

La base de Fock es eigenbase exacta de este hamiltoniano. El límite es estrictamente integrable al poseer tantas cantidades conservadas (los operadores de número \hat{n}_i) como sitios en la red. No obstante, como los eigenvalores son múltiplos enteros de U , el espectro exhibe degeneraciones exactas y no se distribuye uniformemente. Por lo tanto, su estadística local carece de la falta de correlación de variables aleatorias independientes requerida para reproducir la distribución de Poisson.

- Límite cuando $J/U \rightarrow \infty$: Equivalente a $U = 0$ y $J \neq 0$, reduciendo el sistema a su término cinético:

$$\hat{H} = -J \sum_{i=1}^{L-1} \left(\hat{a}_i^\dagger \hat{a}_{i+1} + \hat{a}_{i+1}^\dagger \hat{a}_i \right). \quad (14)$$

Al proponer un eigenvector de una partícula $|\phi\rangle = \sum_{i=1}^L \phi_i \hat{a}_i^\dagger |0, \dots, 0\rangle$, la condición $\hat{H}|\phi\rangle = \epsilon|\phi\rangle$ requiere que las amplitudes satisfagan:

$$-J(\phi_{i-1} + \phi_{i+1}) = \epsilon\phi_i, \quad (15)$$

con $\phi_0 = \phi_{L+1} = 0$. Tomando el *ansatz* $\phi_j = A \sin(\beta \cdot j)$, se obtiene un número cuántico $m \in \{1, 2, \dots, L\}$ y las energías de partícula individual:

$$\epsilon_m = -2J \cos\left(\frac{m\pi}{L+1}\right). \quad (16)$$

Sin interacción interpartícula, el sistema se comporta como un gas de bosones libres en tunelaje. Las energías totales de muchos cuerpos son la suma de estos autoestados individuales:

$$E_{\{n_m\}} = \sum_{m=1}^L n_m \epsilon_m, \quad (17)$$

con $\sum_{m=1}^L n_m = N$. Puesto que el espectro global se genera mediante combinaciones lineales de un conjunto muy reducido de niveles ϵ_m , exhibe una fuerte regularidad aritmética y degeneraciones, en consecuencia, se desvía drásticamente de la estadística de Poisson pese a su integrabilidad estricta.

4 Conclusiones

En este trabajo se caracterizó la transición entre integrabilidad y caos cuántico en el modelo de Bose-Hubbard unidimensional con condiciones de frontera abiertas, en función del parámetro de control J/U . Para ello, se emplearon como indicadores estadísticos el valor promedio del cociente de espaciamentos a primeros vecinos $\langle r \rangle$ [14, 15] y la divergencia de Kullback-Leibler (KL) [16]. La evaluación directa de los cocientes de espaciamentos elude las dificultades numéricas intrínsecas del procedimiento de *unfolding*, mientras que la divergencia KL proporciona una medida robusta que compara punto a punto las distribuciones de probabilidad empíricas $P(r)$ frente a las predicciones analíticas de los ensambles de Poisson y GOE.

Mediante el indicador $\langle r \rangle$ se determinó que, para los tamaños estudiados ($N = L \in \{7, 8, 9, 10\}$), la estadística espectral del sistema se aproxima consistentemente al ensamble GOE dentro del intervalo $J/U \in [0.5, 10]$, evidenciando un régimen de caos cuántico. La divergencia KL confirma esta transición, pero revela un comportamiento de mayor resolución: la proximidad estricta a los modelos teóricos no se mantiene homogénea a lo largo de un intervalo continuo, sino que se maximiza en valores particulares de J/U .

Específicamente, en los intervalos evaluados se identificaron mínimos locales en la divergencia KL, denotando valores particulares de máxima correspondencia tanto para el régimen caótico (GOE) como para los regímenes integrables (Poisson). Los regímenes integrables y las regiones de transición exhiben una dependencia con la dimensión del espacio de Hilbert. Los resultados indican que los efectos de tamaño finito influyen en qué intervalos de J/U se observa una correspondencia con las estadísticas de referencia, notablemente el intervalo asociado a una mayor correspondencia con GOE no varía significativamente con el tamaño del sistema mientras que para los intervalos donde se observa correspondencia con Poisson hay una dependencia respecto al tamaño de la red y al número de partículas. Los casos asintóticos, $J/U \rightarrow \infty$ y $J/U \rightarrow 0$ son casos estrictamente integrables y no depende del tamaño del sistema, y en vista que el intervalo que corresponde a caos cuántico es independiente del tamaño del sistema, el principal efecto de tamaño finito es que, a mayor tamaño de sistema, mejor es la correspondencia con las estadísticas de referencia.

Finalmente, dado que el análisis de cocientes a primeros vecinos requiere la separación explícita de las simetrías espaciales del hamiltoniano (como la paridad), se sugiere para trabajos futuros la implementación del cociente de espaciamentos de orden superior [17], r_n , definidos a partir de espaciamentos entre vecinos de orden n , $s_n^k = E_{n+k} - E_n$, según $r_n^k = \frac{\min(s_n^k, s_{n-1}^k)}{\max(s_n^k, s_{n-1}^k)}$. Este indicador no solo permiten capturar correlaciones de largo alcance en el espectro, sino que presentan la propiedad de ser independientes de las simetrías subyacentes del sistema [17]. Esta característica es particularmente útil para analizar la ergodicidad en sistemas donde la descomposición del espacio de Hilbert en sectores de simetría resulta computacionalmente costosa o analíticamente compleja.

References

- [1] L. D'Alessio, Y. Kafri, A. Polkovnikov, and M. Rigol, “From quantum chaos and eigenstate thermalization to statistical mechanics and thermodynamics”, *Advances in Physics* **65**, 239–362 (2016).
- [2] J. M. Zhang and R. X. Dong, “Exact diagonalization: the bose-hubbard model as an example”, *European Journal of Physics* **31**, 591–602 (2010).
- [3] R. Nandkishore and D. A. Huse, “Many-body localization and thermalization in quantum statistical mechanics”, *Annual Review of Condensed Matter Physics* **6**, 15–38 (2015).
- [4] O. Bohigas, M. J. Giannoni, and C. Schmit, “Characterization of chaotic quantum spectra and universality of level fluctuation laws”, *Physical Review Letters* **52**, 1–4 (1984).
- [5] M. V. Berry and M. Tabor, “Level clustering in the regular spectrum”, *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences* **356**, 375–394 (1977).
- [6] T. Guhr, A. Müller-Groeling, and H. A. Weidenmüller, “Random-matrix theories in quantum physics: common concepts”, *Physics Reports* **299**, 189–425 (1998).
- [7] D. Jaksch, C. Bruder, J. I. Cirac, C. W. Gardiner, and P. Zoller, “Cold bosonic atoms in optical lattices”, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 3108–3111 (1998).
- [8] M. Greiner, O. Mandel, T. Esslinger, T. W. Hänsch, and I. Bloch, “Quantum phase transition from a superfluid to a mott insulator in a gas of ultracold atoms”, *Nature* **415**, 39–44 (2002).

- [9] J. de la Cruz, S. Lerma-Hernández, and J. G. Hirsch, “Quantum chaos in a system with high degree of symmetries”, *Physical Review E* **102**, 032208 (2020), [arXiv:2005.06589 \[quant-ph\]](#).
- [10] L. Pausch, A. Buchleitner, E. G. Carnio, and A. Rodríguez, “Optimal route to quantum chaos in the bose–hubbard model”, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* **55**, 324002 (2022).
- [11] M. L. Mehta, *Random matrices*, 3rd, Vol. 142, Pure and Applied Mathematics (Elsevier, Amsterdam, 2004).
- [12] E. P. Wigner, “Characteristic vectors of bordered matrices with infinite dimensions”, *Annals of Mathematics* **62**, 548–564 (1955).
- [13] S. H. Tekur, U. T. Bhosale, and M. Santhanam, “Higher order spacing ratios in random matrix theory and complex quantum systems”, *Physical Review E* **98**, 062218 (2018).
- [14] V. Oganesyan and D. A. Huse, “Localization of interacting fermions at high temperature”, *Physical Review B* **75**, 155111 (2007).
- [15] Y. Y. Atas, E. Bogomolny, O. Giraud, and G. Roux, “Distribution of the ratio of consecutive level spacings in random matrix ensembles”, *Physical Review Letters* **110**, [10.1103/physrevlett.110.084101](#) (2013).
- [16] S. Kullback and R. A. Leibler, “On information and sufficiency”, *The Annals of Mathematical Statistics* **22**, 79–86 (1951).
- [17] S. H. Tekur and M. S. Santhanam, “Symmetry deduction from spectral fluctuations in complex quantum systems”, *Physical Review Research* **2**, [10.1103/physrevresearch.2.032063](#) (2020).